Curve parametriche

Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1. *Una* **curva** *in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua*

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

definita su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$. Più in generale, dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una curva in Ω è una funzione continua

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

a valori in Ω, ovvero tale che

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Definizione 2. *Dati un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e due punti $X, Y \in \Omega$, diremo che una curva (in Ω)*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

connette i punti X e Y (in Ω), se

$$\gamma(a) = X \qquad e \qquad \gamma(b) = Y.$$

Sostegno di una curva

Definizione 3. *Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, si dice* **sostegno di** γ *il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$*

$$\Big\{\gamma(t) \ : \ t \in [a, b]\Big\}.$$

Esempio 4. *Il sostegno della curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t)$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 in $\mathbb{R}^2$.

Concatenamento di curve

Definizione 5 (Concatenamento)**.** Date due curve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [b, c] \to \mathbb{R}^n,$$

tali che

$$\gamma(b) = \sigma(b),$$

definiamo il **concatenamento**

$$\gamma * \sigma : [a, c] \to \mathbb{R}^n$$

come

$$\gamma * \sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [a, b]; \\ \sigma(t), & \text{se} \quad t \in [b, c]. \end{cases}$$

Curve inverse (curve opposte)

Definizione 6. Date una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definiamo la curva inversa

$$\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

come

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Curve equivalenti

Definizione 7. Diciamo che le curve
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [A,B] \to \mathbb{R}^n$$
sono **equivalenti**, se esiste una funzione
$$g : [a,b] \to [A,B],$$
di classe $C^1([a,b])$ tale che
$$g(a) = A\,, \quad g(b) = B \quad \text{e} \quad g' > 0 \ \text{ su } \ [a,b]$$
e tale che
$$\gamma(t) = \sigma(g(t)) \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [a,b].$$
Si dice anche che γ è una riparametrizzazione di σ.

Osservazione 8. *Date due curve equivalenti*
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A,B] \to \mathbb{R}^n\ ,$$
abbiamo che:
- γ *e* σ *hanno lo stesso sostegno;*
- γ *e* σ *hanno gli stessi estremi:*
$$\gamma(a) = \sigma(A) \quad e \quad \gamma(b) = \sigma(B).$$

Esempio 9. *Data una curva*
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n,$$
la curva
$$\sigma : [0,4] \to \mathbb{R}^n\ , \qquad \sigma(t) = \gamma({}^t\!/\!{}_4)$$
è una sua equivalente.

Esempio 10. *Le curve*
$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \big(\cos t\,,\ \sin t\big),$$
$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(t) = \big(\cos(\pi t)\,,\ \sin(\pi t)\big),$$
sono equivalenti.

Esempio 11. *Data una curva*
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$$
la curva
$$\sigma : [a-5, b-5] \to \mathbb{R}^n\ , \qquad \sigma(t) = \gamma(t+5),$$
è una sua equivalente.

Esempio 12. *Data una curva*
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$$
possiamo trovare una sua equivalente definita sull'intervallo $[0,1]$*. Infatti, basta prendere la curva*
$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n\ , \qquad \sigma(t) = \gamma\big(a + t(b-a)\big).$$

Esempio 13. *Data una curva*
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$$
ed un qualsiasi intervallo chiuso e limitato
$$[A,B] \subset \mathbb{R},$$
possiamo trovare una sua equivalente definita su $[A,B]$*. Infatti, basta prendere la curva*
$$\sigma : [A,B] \to \mathbb{R}^n\ , \qquad \sigma(T) = \gamma\Big(a + \frac{T-A}{B-A}(b-a)\Big).$$