Estremo superiore

Estremo superiore di un insieme

Definizione 1. *Sia A un insieme di numeri reali. Diciamo che A è* **limitato superiormente***, se esiste un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che*

$$a \le m \quad \textit{per ogni} \quad a \in A.$$

Insiemi illimitati superiormente

Se l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ non è limitato superiormente, allora per definizione il suo estremo superiore è $+\infty$:

$$\sup A := +\infty.$$

Osserviamo che per ogni numero naturale n esiste un elemento $a_n \in A$ tale che $a_n \ge n$ (infatti, se un tale elemento non esistesse, A sarebbe limitato superiormente). La successione così ottenuta diverge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

In particolare,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

Insiemi limitati superiormente

Teorema 2. *Se l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora esiste un unico numero reale $s \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

(1) *$a \le s$ per ogni $a \in A$;*

(2) *esiste una successione $(a_n)_n$ di elementi di A tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.*

Il numero reale s è detto estremo superiore di A e si indica con

$$s = \sup A.$$

Se s è un elemento di A, allora diciamo che s è il massimo di A

$$s = \max A.$$

Costruzione dell'estremo superiore

La dimostrazione del Teorema 2 segue dal seguente assioma dei numeri reali.

Assioma di completezza. Se A e B sono due sottoinsiemi (non vuoti) dei numeri reali con la proprietà seguente:

$$a \le b \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{ed ogni} \quad b \in B,$$

allora esiste un numero reale $c \in \mathbb{R}$ che sta tra A e B, ovvero

$$a \le c \le b \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{ed ogni} \quad b \in B.$$

Osservazione 3. *L'elemento c potrebbe non essere unico (come, per esempio, nel caso $A = [0,1]$, $B = [3,5]$, dove uno può prendere come c un qualsiasi punto dell'intervallo $[1,3]$).*

Osservazione 4. *L'elemento c potrebbe appartenere ad A oppure a B, oppure ad entrambi insiemi. Per esempio,$A = [0,1]$, $B = [1,2]$. In questo caso $c = 1$.*

Dimostrazione del Teorema 2

Sia B l'inseieme di tutti i maggioranti di A, ovvero:

$$B := \Big\{ b \in \mathbb{R} \ : \ b \geq a \ \text{ per ogni } a \in A \Big\}.$$

Osserviamo che, siccome A è limitato superiormente, l'insieme B non è vuoto. Per costruzione abbiamo che

$$a \leq b \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{ed ogni} \quad b \in B.$$

Quindi, per l'assioma di completezza, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{ed ogni} \quad b \in B.$$

In particolare,

$$a \leq c \quad \text{per ogni} \quad a \in A,$$

e quindi (per la definizione di B) c è un maggiorante di A:

$$c \in B.$$

Inoltre, c è il più piccolo tra i maggioranti di A:

$$c \leq b \quad \text{per ogni} \quad \text{per ogni} \quad b \in B.$$

Dimostriamo ora che esiste una successione

$$a_n \in A \ , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Sia $n \in N$ un numero naturale. Siccome

$$c - \frac{1}{n} < c$$

e c è il più piccolo tra i maggioranti di A, abbiamo che

$$c - \frac{1}{n} \quad \text{non può essere un maggiorante di } A.$$

Esiste quindi un qualche elemento

$$a_n \in A \ , \quad c - \frac{1}{n} \leq a_n.$$

Abbiamo quindi una successione $a_n \in A$ tale che

$$c - \frac{1}{n} \leq a_n \leq c \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1.$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Infine, rimane da dimostrare l'unicità del sup. Supponiamo che s e c sono due numeri reali tali che:

- $a \leq s$ per ogni $a \in A$;
- esiste una successione $(a_n)_n$ di elementi di A tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.
- $a \leq c$ per ogni $a \in A$;
- esiste una successione $(b_n)_n$ di elementi di A tale che $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

Ora, siccome

$$a_n \leq c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = s,$$

passsando al limite, otteniamo che

$$s \leq c.$$

Viceversa, siccome

$$b_n \leq s \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$

abbiamo che

$$c \leq s.$$

Quindi $s = c$.

Estremo superiore di un insieme di numeri reali - enunciato generale

Possiamo riassumere i casi A limitato ed A illimitato superiormente nel modo seguente.

Teorema 5. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ esiste uno e uno solo*

$$s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

con le seguenti proprietà:

(1) *$a \leq s$ per ogni $a \in A$;*

(2) *esiste una successione $(a_n)_n$ di elementi di A tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.*

Il numero reale s è detto estremo superiore di A e si indica con $s = \sup A$. Se A è limitato superiormente ed s è un elemento di A, allora diciamo che s è il massimo di A.

Estremo superiore di una funzione

Definizione 6. *Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.*
Consideriamo l'insieme dei valori di F

$$A := \Big\{ F(X) \ : \ X \in \Omega \Big\}.$$

A è un insieme di numeri reali, quindi esiste l'estremo superiore

$$s = \sup A = \sup \Big\{ F(X) \ : \ X \in \Omega \Big\}, \qquad s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Diremo che s è **l'estremo superiore di F su Ω** *e scriveremo:*

$$s = \sup_{X\in\Omega} F(X) \qquad \textit{oppure} \qquad s = \sup_{\Omega} F.$$

Osservazione 7. *Ricordiamo che l'estremo superiore s ha le seguenti proprietà:*

- *$a \leq s$ per ogni $a \in A$;*
- *esiste una successione $(a_n)_n$ di elementi di A tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.*

Per la definizione di A, possiamo riscrivere queste condizioni nel modo seguente:

- *$\sup_{\Omega} F \geq F(X)$ per ogni $X \in \Omega$;*
- *esiste una successione $(X_n)_n$ di punti di Ω tale che*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \sup_{\Omega} F.$$