Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme

Parte interna

Definizione 1. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.*

- *Dato un punto $X \in \mathbb{R}^d$, diciamo che X è un punto* **all'interno di** Ω*, se:*

$$\text{esiste un raggio } r > 0 \text{ tale che } B_r(X) \subset \mathbb{R}^d;$$

- *La* **parte interna** $\operatorname{int}(\Omega)$ *di Ω è l'insieme di tutti i punti interni di Ω.*

Osservazione 2. *La parte interna* $\operatorname{int}(\Omega)$*, di un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, è contenuta in Ω stesso. Infatti, se $X \in \operatorname{int}(\Omega)$, allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset \Omega$. In particolare, $X \in \Omega$.*

Teorema 3. *Dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, la sua parte interna* $\operatorname{int}(\Omega)$ *è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto $X \in \operatorname{int}(\Omega)$. Per definizione esiste un raggio $R > 0$ tale che

$$B_R(X) \subset \Omega.$$

Prendiamo un qualsiasi punto $Y \in B_R(X)$. Allora,

$$B_r(Y) \subset B_R(X) \qquad \text{dove} \qquad r = R - |Y - X|.$$

In particolare, $B_r(Y) \subset \Omega$. Ma allora, per definizione, $Y \in \operatorname{int}(\Omega)$. Siccome il punto Y è arbitrario, abbiamo ottenuto che

$$B_R(X) \subset \operatorname{int}(\Omega).$$

□

Teorema 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme qualsiasi. Se A è un insieme aperto contenuto in Ω, allora:*

$$A \subset \operatorname{int}(\Omega).$$

Dimostrazione. Sia $X \in A$. Siccome A è aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(X) \subset A.$$

Siccome A è contenuto in Ω, abbiamo che

$$B_r(X) \subset \Omega.$$

Allora, per definizione, $X \in \operatorname{int}(\Omega)$. □

Esempio 5. *Se l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è un aperto, allora* $\operatorname{int}(\Omega) = \Omega$.

Esempio 6. *Dati due intervalli chiusi $[a, b]$ e $[c, d]$, consieriamo il rettangolo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Allora,*

$$\operatorname{int}(\mathcal{R}) = (a, b) \times (c, d).$$

Esempio 7. *Dato il segmento*

$$S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1, \ 0 \le y \le 1\Big\},$$

in $\mathbb{R}^2$, la sua parte interna $\operatorname{int}(S)$ *è l'insieme vuoto.*

Esempio 8. *Consideriamo l'insieme*

$$\Omega = B_1 \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 2,\ y = 0\Big\},$$

in $\mathbb{R}^2$*. Allora, la sua parte interna è data da:*

$$\mathrm{int}(\Omega) = B_1.$$

Esempio 9. *Sia* $\overline{B}_R$ *la palla chiusa di centro l'origine e raggio* $R > 0$ *in* $\mathbb{R}^d$*:*

$$\overline{B}_R := \Big\{X \in \mathbb{R}^d \;:\; |X| \le R\Big\}.$$

Allora, la parte interna di $\overline{B}_R$ *è data da*

$$\mathrm{int}\big(\overline{B}_R\big) = B_R,$$

dove B_R *è la palla aperta di centro l'origine e raggio* $R > 0$*,*

$$B_R := \Big\{X \in \mathbb{R}^d \;:\; |X| < R\Big\}.$$

Chiusura

Definizione 10. *Sia* Ω *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$*.*

- *Diciamo che* $X \in \mathbb{R}^d$ *è un* **punto di aderenza** *di* Ω*, se esiste una successione di punti di* Ω *che converge a* X*.*
- *La* **chiusura** *di* Ω *è l'insieme di tutti i punti di aderenza di* Ω*. La chiusura di* Ω *si indica con* $\overline{\Omega}$*.*

Osservazione 11. *Osserviamo che se* X *è un punto di* Ω*, allora* X *è anche un punto di aderenza di* Ω *(infatti, la successione costante* $X_n = X$ *converge a* X*). Allora,* Ω *è contenuto nella sua chiusura. Quindi, per ogni insieme* Ω*, si ha:*

$$\mathrm{int}(\Omega) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}\,.$$

Osservazione 12. *Osserviamo che* X *è un punto di aderenza per* Ω *se e solo se*

per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $Y \in \Omega$ *tale che* $|X - Y| < \varepsilon$*.*

Teorema 13. *Dato un insieme* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*, la sua chiusura* $\overline{\Omega}$ *è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Dimostreremo che $\overline{\Omega}$ è chiuso per successioni. Sia X_n una successione di punti di $\overline{\Omega}$ che converge ad un certo $X_\infty \in \mathbb{R}^d$. In paerticolare, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n \ge 1$ tale che

$$|X_n - X_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Siccome $X_n \in \overline{\Omega}$, esiste $Y \in \Omega$ tale che

$$|X_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Quindi, per la disuguaglianza triangolare

$$|Y - X_\infty| \le |X_n - X_\infty| + |X_n - Y| < \varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo che X_∞ è un punto di aderenza di Ω. □

Teorema 14. *Dato un insieme* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ed un insieme chiuso* C *che lo contiene, si ha che* $\overline{\Omega} \subset C$*.*

Dimostrazione. Siccome C contine Ω, ogni punto di aderenza di Ω è anche punto di aderenza di C. Siccome C è chiuso i punti di aderenza di C stanno in C. Quindi, $\overline{\Omega} \subset C$. □

Esempio 15. *Se l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è un chiuso, allora $\overline{\Omega} = \Omega$.*

Esempio 16. *Dati due intervalli aperti (a,b) e $[c,d]$, consieriamo il rettangolo $\mathcal{R} = (a,b) \times [c,d]$. Allora,*

$$\overline{\mathcal{R}} = [a,b] \times [c,d].$$

Esempio 17. *Dato il segmento*

$$S = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1,\ 0 < y < 1\Big\},$$

in $\mathbb{R}^2$, la sua chiusura è l'insieme

$$\overline{S} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1,\ 0 \leq y \leq 1\Big\},$$

Esempio 18. *Consideriamo l'insieme*

$$\Omega = \overline{B}_1 \setminus \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2,\ y = 0\Big\},$$

in $\mathbb{R}^2$. Allora, la sua chiusura è data da:

$$\overline{\Omega} = \overline{B}_1.$$

Esempio 19. *Sia B_R la palla aperta di centro l'origine e raggio $R > 0$ in $\mathbb{R}^d$:*

$$B_R := \Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ |X| < R\Big\}.$$

Allora, la sua chiusura è la palla chiusa di centro l'origine e raggio $R > 0$,

$$\overline{B}_R := \Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ |X| \leq R\Big\}.$$

Dimostrazione. Sia C la chiusura di B_R. Siccome la palla chiusa $\overline{B}_R$ è un chiuso che contiene B_R, abbiamo che $C \subset \overline{B}_R$. Quindi

$$B_R \subset C \subset \overline{B}_R.$$

Quindi, per dimostrare che $C = \overline{B}_R$, basta osservare che un qualsiasi punto $X \in \overline{B}_R$ con $|X| = R$ è un punto do aderenza per B_R. Infatti, la successione

$$X_n = \frac{n-1}{n} X$$

è una successione di punti di B_R che converge a X. □

Frontiera

Definizione 20 (Bordo/frontiera)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$.*

- *Diciamo che un punto $X \in \mathbb{R}^d$ è un punto di frontiera per Ω, se è un punto di aderenza sia di Ω che del suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.*
- *La frontiera (detta anche bordo) di Ω è l'insieme di tutti i punti di frontiera di Ω e viene indicata con $\partial\Omega$.*

Osservazione 21. *Dati un insieme Ω ed un punto $X \in \mathbb{R}^d$, osserviamo che sono equivalenti:*

- *X è un punto di aderenza di Ω e di $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.*
- *Esistono due successioni $X_n \in \Omega$ e $Y_n \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X = \lim_{n\to\infty} Y_n\,.$$

- *Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due punti $X_\varepsilon \in \Omega$ e $Y_\varepsilon \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ tali che*

$$|X - X_\varepsilon| < \varepsilon \qquad e \qquad |X - Y_\varepsilon| < \varepsilon\,.$$

Osservazione 22. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$.*

Parte interna, chiusura e frontiera

Lemma 23. *Dati un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e un punto $X \in \mathbb{R}^d$, sono equivalenti:*

(1) *X è un punto di aderenza di $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$;*

(2) *$X \in \mathbb{R}^d \setminus \Big(\mathrm{int}(\Omega)\Big)$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$X \in \mathrm{int}(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad X \text{ non è un punto di aderenza di } \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

□

Teorema 24. *Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si ha che $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Big(\mathrm{int}(\Omega)\Big)$.*

Dimostrazione. Per definizione

$$\partial\Omega = \Big\{\text{i punti di aderenza di } \Omega\Big\} \cap \Big\{\text{i punti di aderenza di } \mathbb{R}^d \setminus \Omega\Big\}.$$

Usando il fatto che

$$\overline{\Omega} = \Big\{\text{i punti di aderenza di } \Omega\Big\}$$

ed il lemma precedente, otteniamo

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \Big\{\mathbb{R}^d \setminus \Big(\mathrm{int}(\Omega)\Big)\Big\} = \overline{\Omega} \setminus \Big(\mathrm{int}(\Omega)\Big).$$

□

Corollario 25. *Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il bordo $\partial\Omega$ è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. È una conseguenza del lemma seguente. □

Lemma 26. *Siano A un aperto e C un chiuso di $\mathbb{R}^n$.*
Allora, l'insieme $A \setminus C$ è un aperto e l'insieme $C \setminus A$ è un chiuso.

Dimostrazione. Dimostriamo che $C \setminus A$ è un chiuso. Siccome C è un chiuso, possiamo scrivere $C = \mathbb{R}^n \setminus D$, dove D è un aperto. Si ha quindi

$$C \setminus A = \big(\mathbb{R}^n \setminus D\big) \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus (A \cup D).$$

Siccome $A \cup D$ è aperto, abbiamo che $C \setminus A$ è chiuso. □

Esercizi ed esempi

Esercizio 27. *Sia B_R la palla aperta di centro l'origine e raggio $R > 0$ in $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che il bordo di B_R è la sfera*

$$\partial B_R = \Big\{X \in \mathbb{R}^d \ :\ |X| = R\Big\}.$$

Esercizio 28. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e siano*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\Big\}, \qquad C = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq f(x)\Big\}.$$

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\Big\}.$$

Si mostri che :

(i) $\Gamma = \partial A = \partial C$;

(ii) $\overline{A} = C$ *and* $\mathring{C} = A$.

Esercizio 29. *Trovare* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *tale che:*

(1) $\mathring{\Omega} = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(2) $\partial\Omega = B_1(0)$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(3) $\partial\Omega = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(4) $\partial\Omega = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(5) $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

Esercizio 30.

(1) *È vero che per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *vale l'uguaglianza* $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ *?*

(2) *È vero che per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *vale l'uguaglianza* $\partial\Omega = \partial\mathring{\Omega}$ *?*