

DIFFERENZA DI INSIEMI APERTI E CHIUSI

Proposizione 1. *Siano A un aperto e C un chiuso di \mathbb{R}^d . Allora:*

- (i) *l'insieme $A \setminus C$ è aperto in \mathbb{R}^d ;*
- (ii) *l'insieme $C \setminus A$ è chiuso in \mathbb{R}^d .*

Dimostrazione. Siccome C è un chiuso, possiamo scrivere $C = \mathbb{R}^d \setminus D$, dove D è un aperto. Osserviamo che

$$A \setminus C = A \setminus (\mathbb{R}^d \setminus D) = A \cap D.$$

Siccome l'intersezione di due aperti è un aperto, abbiamo dimostrato (i).

Dimostriamo ora che $C \setminus A$ è un chiuso. Osserviamo che

$$C \setminus A = (\mathbb{R}^d \setminus D) \setminus A = \mathbb{R}^d \setminus (A \cup D).$$

Siccome $A \cup D$ è aperto, abbiamo che $\mathbb{R}^d \setminus (A \cup D)$ è un chiuso. Quindi, anche $C \setminus A$ è un chiuso. \square