CAPITOLO 1

Generalità sulle equazioni ellittiche

1 Introduzione

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Considereremo operatori del tipo:

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right), \text{ (detto in forma variazionale o di divergenza);} \tag{1}$$

oppure

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}, \text{ (detto in forma non variazionale).} \tag{2}$$

Le due forme possono essere equivalenti se i coefficienti sono sufficientemente regolari a meno di introdurre termini contenenti derivate di ordine inferiore della u.

Definizione 1.1. *Diremo che l'operatore A è* **ellittico nel punto** $x \in \Omega$ *se la matrice* $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ *dei coefficienti verifica la seguente ipotesi: esiste* $\nu(x) > 0$ *tale che per ogni* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \;\geq\; \nu(x)\,\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n}. \tag{3}$$

Diremo che A è **ellittico** *in Ω se è ellittico in ogni $x \in \Omega$.*

Definizione 1.2. *Diremo che l'operatore A è* **uniformemente ellittico in** Ω *se la matrice* $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ *dei coefficienti verifica la seguente ipotesi: esiste* $\nu > 0$ *tale che per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \;\geq\; \nu\,\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n}. \tag{4}$$

Nel seguito quando considereremo equazioni differenziali del tipo

$$A_1 u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\,u(x) = f(x), \tag{5}$$

oppure del tipo

$$A_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\,u(x) = f(x), \tag{6}$$

diremo che sono *uniformemente ellittiche* se le loro *parti principali*, ovvero la parte che contiene le derivate di ordine massimo, sono *uniformemente ellittiche* su Ω.

2 Varie definizioni di soluzione un'equazione ellittica

Definizione 2.1. *Si dice che u è soluzione* **classica** *in Ω dell' equazioni differenziali (5) (o (6)) se $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, mentre b_i, c appartengono a $C^0(\overline{\Omega})$ e $A_1(u) = f(x)$ (o se a_{ij}, b_i, $c \in C^0(\overline{\Omega})$ e risulta $A_2(u) = f(x)$) per ogni $x \in \Omega$.*

Definizione 2.2. *Si dice che $u \in H^{2,p}(\Omega)$, $p \geq 1$ è soluzione* **forte** *in Ω dell' equazione differenziale $A_2 u = f$ con $f \in L^p(\Omega)$ e a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, se per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha*

$$A_2 u \,=\, f(x).$$

Definizione 2.3. *Si dice che $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$ è soluzione* **nel senso delle distribuzioni** *in Ω dell' equazione differenziale $A_1(u) = f$ con $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha*

$$< A_1(u), \varphi > = < f, \varphi > .$$

Prima di chiarire il legame tra le varie definizioni di soluzioni premettiamo la seguente osservazione.
Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Se i coefficienti dell'operatore A definito in (1) sono di classe $L^\infty(\Omega)$ allora per ogni $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, vale la formula

$$< Au, \varphi > = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\, D_i u(x)\, D_j \varphi(x) \;\, dx. \tag{7}$$

Infatti $a_{ij} D_i u \in L^p(\Omega)$ è identificabile con una distribuzione per quanto osservato nel paragrafo sulle distribuzioni del Capitolo 0. Quindi è derivabile e la sua derivata è una distribuzione, ne segue che
$A(u) \,=\, -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)$, può essere considerato una distribuzione. Potremo allora scrivere

$$\begin{aligned} < Au, \varphi > &= < -\sum_{i,j=1}^{n} D_j\left(a_{ij}(x)\, D_i u\right), \varphi > = \\ &= < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i u,\, D_j \varphi > = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_i \varphi(x) \; dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Osservazione 2.4. *Se $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in C^0(\overline{\Omega})$ e u è soluzione classica dell'equazione differenziale $A_1(u) = f$ allora u è soluzione nel senso delle distribuzioni.*

Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta

$$< A_1 u, \varphi > = \int_\Omega A_1 u\, \varphi \; dx \;=\; \int_\Omega f(x)\, \varphi(x) \; dx \;= < f, \varphi >$$

Vale anche il viceversa:

Osservazione 2.5. *Se $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in C^0(\overline{\Omega})$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega})$ e u è soluzione nel senso delle distribuzioni dell'equazione differenziale $A_1(u) = f$ allora u è soluzione classica.*

Infatti dalla Definizione 2.3 otteniamo per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$0 = < A_1 u, \varphi > \,-\, < f, \varphi > = \int_\Omega (A_1 u \,-\, f)(x)\, \varphi(x) \; dx.$$

Come conseguenza delle precedenti osservazioni possiamo affermare che

Proposizione 2.6. *Siano $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H^{1,2}(\Omega)$, $\partial\Omega$ di classe C^1, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora u è soluzione nel senso delle distribuzioni di*

$$A_1 u = f$$

se e solo se, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta

$$a(u,\varphi) =< f,\varphi >,$$

dove abbiamo posto

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi(x) + \lambda(x)\, u(x)\, \varphi(x) \right) dx. \tag{9}$$

3 Il problema di Dirichlet per operatori simmetrici.

Ci proponiamo di dimostrare l'esistenza di una soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione:

$$A_1 u = f. \tag{10}$$

in forma variazionale "semplificata", ovvero sotto l'ipotesi $b_i = 0$ su Ω per ogni $i = 1, \cdots, n$. Il problema generale sarà affrontato nei paragrafi successivi. L'operatore può essere visto, anche se i coefficienti b_i non sono necessariamente nulli (purché in $L^\infty(\Omega)$), come operatore tra lo spazio $H^{1,p}$, $p \geq 1$, e $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ricordiamo che $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H^{1,p}(\Omega)$ e Ω è limitato). Risulta evidente che $a_{ij}\, D_{ij} u \in L^p(\Omega)$, quindi, per quanto osservato nell'ultimo paragrafo del Capitolo 0, si ha che $A_1 u \in H^{-1,p'}(\Omega)$. Da questa osservazione otteniamo che l'equazione (10) avrà soluzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$, nel senso delle distribuzioni, solo se $f \in H^{-1,p'}(\Omega)$, inoltre la stessa può essere scritta anche nella forma

$$A_1 u = \sum_{i=1}^n D_i\, f_i, \text{ dove } f_i \in L^{p'}(\Omega). \tag{11}$$

Come vedremo il problema di provare l'esistenza di una soluzione è ben posto se si aggiunge un'ulteriore condizione riguardante la traccia di u su $\partial\Omega$, ovvero se si considera quello che si chiama **problema di Dirichlet**:

$$\begin{cases} A_1 u = \displaystyle\sum_{i=1}^n D_i\, f_i, \text{ su } \Omega, \\ \\ u(x) = g(x), \text{ su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

dove g è un'opportuna funzione assegnata. Per risolvere questo problema considereremo la forma bilineare associata all'equazione (vedi (9)) ed utilizzando teoremi di analisi funzionale quali il teorema di F. Riesz (nel caso simmetrico) o il teorema di Lax-Milgram (nel caso non simmetrico). Il primo di questi è di più immediata applicazione in quanto riguarda la forma bilineare legata all'equazione

$$a_\lambda(u,\varphi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \lambda(x)\, u(x)\, \varphi(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i(x)\, D_i\, \varphi(x)\, dx. \tag{13}$$

Applichiamo a questa il teorema di F. Riesz sotto opportune ipotesi sui coefficienti e sugli spazi come si vede dal seguente teorema.

Teorema 3.1. *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Siano $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1, \cdots, n$,* **simmetrici***: $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1, \cdots, n$. Supponiamo inoltre che sia verificata l'ipotesi di* **uniforme ellitticità** *su Ω della Definizione (1.2). Siano $b_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $\lambda(x) \geq 0$ q.o. in Ω. Se $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$,*

$g \in H^{1,2}(\Omega)$, allora esiste una ed una sola soluzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ del problema di Dirichlet (12) e vale la maggiorazione

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; c\,\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^2\Omega} \;+\; \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)}.\right) \tag{14}$$

Dimostrazione. Come primo passo consideriamo il problema nel caso $g = 0$ e consideriamo i rappresentanti $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$ di f. Dimostriamo che, nelle ipotesi del teorema, la forma bilineare $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ definisce su $H_0^{1,2}(\Omega)$ un prodotto scalare rispetto al quale questo spazio risulta essere uno spazio di Hilbert. In questo modo, applicando il *teorema di rappresentazione di Riesz* otteniamo l'esistenza ed uncità di soluzione del problema di Dirichlet considerato nonché la maggiorazione

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq c\|f\|_{H^{1,2}(\Omega)} \tag{15}$$

Infatti la forma è simmetrica per l'ipotesi di simmetria sulla matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ dei coefficienti. Inoltre

$$(u,v)_{H_0^{1,2}(\Omega)} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega D_i u(x)\, D_i v(x)\; dx$$

e $a_\lambda(u,v)$ sono prodotti scalari equivalenti in $H_0^{1,2}(\Omega)$, nel senso che le norme indotte da essi sono equivalenti. Infatti per l'ipotesi di uniforme ellitticità (1.2) vale la maggiorazione

$$a_\lambda(u,u) \;=\; \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, D_i\, u(x)\, D_j\, u(x) \;+\; \lambda(x)\, u^2(x)\right)\; dx \geq\; \nu\,\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(|D_i u(x)|^2 \;+\; \lambda(x)|u(x)|^2\right)\; dx. \tag{16}$$

Se $\lambda(x) \geq \lambda > 0$ q.o. in Ω da (16) segue

$$a_\lambda(u,u) \;\geq\; min(\nu,\lambda)\,\|u\|^2_{1,2,\Omega}.$$

Se invece $\lambda(x) = 0$ su un sottoinsieme di Ω di misura non nulla, allora da (16) e dalla diseguaglianza di Poincaré

$$a_\lambda(u,u) \;\geq\; \nu\,|u|^2_{1,2,\Omega} \;\geq\; c\,\|u\|^2_{1,2,\Omega}.$$

In ogni caso, per $\lambda \geq 0$ q.o. in Ω, esiste una costante c_1 tale che per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, vale

$$a_\lambda(u,u) \;\geq\; c_1\,\|u\|^2_{1,2,\Omega}. \tag{17}$$

Infine è evidente che, per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, vale

$$a_\lambda(u,u) \;\leq\; c_2\,\|u\|^2_{1,2,\Omega}.$$

Osserviamo ora che risolvere l'equazione relativa la problema (12) in $H_0^1(\Omega)$, con $g = 0$, equivale (per definizione di soluzione nel senso delle distribuzioni) a risolvere, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la seguente equazione

$$a_\lambda(u,\varphi) =< \sum_{i=1}^{n} D_i f_i, \varphi >= -\sum_{i=1}^{n} < f_i, D_i\varphi >= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f_i(x)\, D_i\varphi(x)\; dx \tag{18}$$

Dalla definizione di $H_0^{1,2}(\Omega)$ sappiamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $H_0^{1,2}(\Omega)$. Possiamo scrivere (18), per ogni $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, come segue

$$a_\lambda(u,v) = -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f_i(x)\, D_i v(x)\; dx \tag{19}$$

Il secondo membro di (19) è quindi un funzionale lineare e continuo su $H_0^{1,2}(\Omega)$ rispetto alla norma $\sqrt{a_\lambda(u,u)}$, infatti, per ogni $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, risulta

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\, D_i v(x)\; dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |f_i(x)|\; |D_i v(x)|\; dx \;\leq\; \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{1,2,\Omega} \;\leq$$

$$\text{per (17)} \tag{20}$$

$$\leq c_3 \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a_\lambda(v,v)}.$$

Per il teorema di F. Riesz, in corrispondenza della n-pla $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$, resta individuato univocamente un elemento $u = G(f_1, \cdots, f_n) \in H^{1,2}(\Omega)$, tale che, per ogni $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$:

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\, D_i\, v(x)\; dx \;=\; a_\lambda(u,v). \tag{21}$$

Quindi resta individuato un operatore G, lineare e continuo di $H^{-1,2}(\Omega)$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$, relativo al problema di Dirichlet 12, con $g = 0$, che chiamiamo *operatore di Green.* Per quanto dimostrato sopra G è un isomorfismo tra $H^{-1,2}(\Omega)$ e $H_0^{1,2}(\Omega)$.

Infatti, per ogni $f \in H^{-1,2}(\Omega)$, esistono $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$ tali che $f = \sum_{i=1}^{n} D_i\, f_i$ nel senso delle distribuzioni.

Da (21), per ogni $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, si ha

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\, D_i\, v(x)\; dx \;=\; a_\lambda(Gf, v).$$

Per il teroema di Riesz e per (20)

$$\sqrt{a_\lambda(Gf, Gf)} \;=\; \sup_{\substack{v \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\, D_i v(x)\; dx|}{\sqrt{a_\lambda(v,v)}} \;\leq\; c \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

Da questa tenuto conto di (17) otteniamo:

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \;=\; \|Gf\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; c \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Poiché vale per ogni insieme di funzioni $\{f_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset L^2(\Omega)$ che individuano f si avrá infine che

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; c\, \|f\|_{H^{-1,2}(\Omega)}. \tag{22}$$

Consideriamo ora il caso che $g \neq 0$. La funzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è soluzione dell'equazione relativa al problema (12), nel senso delle distribuzioni se e solo se $w = u - g$ è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} A_\lambda w \;=\; \displaystyle\sum_{i=0}^{n} D_i\, f_i \;-\; A_\lambda g, \;\text{ su } \Omega, \\[2ex] w(x) = 0, \;\text{ su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{23}$$

Osserviamo che ci siamo riportati al caso precedente, in particolare

$$\sum_{i=0}^{n} D_i\, f_i \,-\, A_\lambda g \in H^{-1,2}(\Omega),$$

quindi esiste una ed una sola soluzione $w \in H_0^{1,2}(\Omega)$ di (23). Di conseguenza esiste una ed una sola soluzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ di 12. Per quanto riguarda la maggiorazione (14) si ha, utilizzando (22)

$$\begin{aligned}
&\|w\|_{1,2,\Omega} \,\leq\, c \,\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \|f_i \,-\, a_{ij}\, D_j g\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq\, c \left(\textstyle\sum_{i=1,2}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \,+\, \|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, \|D_j g\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq \\
&\leq c \max_{i,j=1,\cdots,n} (1,\, \|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}) \left(\sum_{i=1,2}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \,+\, \|g\|_{1,2,\Omega}\right).
\end{aligned} \tag{24}$$

□

4 Il problema di Dirichlet per operatori non simmetrici

Il problema dell'esistenza di soluzione per il problema di Dirichlet relativo ad un operatore con matrice della parte principale non simmetrica può essere affrontato utilizzando una generalizzazione del teorema di F. Riesz, ovvero il Teorema di Lax-Milgram.
Quella che proponiamo è una versione più generale di esso, ovvero una versione non lineare (la dimostrazione è riportata nel paragrafo 7).

Teorema 4.1. *(Lax-Milgram generalizzato).*
Siano H uno spazio di Hilbert e $a : H \times H \to \mathbf{R}$ una funzione, con le proprietà:

(0) $a(0, v) = 0$, *per ogni* $v \in H$

(1) $v \to a(u, v)$ *è lineare* $\forall u \in H,$*;*

(2) $|a(u_1, v) - a(u_2, v)| \leq M\|u_1 - u_2\|_H \|v\|_H \quad \forall v \in H,$*;*

(3) $\exists \nu > 0 : \;\; a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq \nu\|u_1 - u_2\|_H^2,\, \forall u_1, u_2 \in H.$

(Se $u \to a(u, v)$ è lineare, la condizione (3) si riduce alla ben nota ipotesi di coercività).
Allora per ogni $F \in H^*$ esiste uno ed un solo $u \in H$ tale che, per ogni $v \in H$, sia verificata

$$a(u, v) = F(v). \tag{25}$$

Inoltre vale la maggiorazione

$$c(\nu)\, \|u\|_H \;\leq\; \|F\|_{H^*}. \tag{26}$$

Utilizziamo questo risultato per provare il seguente Teorema.

Teorema 4.2. *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Siano $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \cdots, n$, e sia verificata l'ipotesi di uniforme ellitticità della Definizione (1.2). Siano $b_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $\lambda(x) \geq 0$ q.o. in Ω. Se $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1,2}(\Omega)$, allora esiste una ed una sola soluzione $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ del problema di Dirichlet (12) e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; c \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2\Omega} \,+\, \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)}.\right) \tag{27}$$

Dimostrazione. Basta provare il teorema nel caso $g = 0$ e poi riportarsi al caso $g \neq 0$ procedendo come è stato fatto nel paragrafo precedente.
Sia $Au = \sum_{i,j=1}^{n} D_i[a_{ij}(x)\, D_j u(x)]$, dove $\{a_{ij}(x)\}$ è una matrice uniformemente ellittica su Ω, costituita da funzioni di classe $L^\infty(\Omega)$. Osserviamo che la forma bilineare

$$a_\lambda(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\; D_i\, u(x)\; D_j\, v(x) \,+\, \lambda(x)\, u(x)\, v(x) \right) \, dx$$

verifica le ipotesi del Teorema 4.1 prendendo come spazio $H = H_0^{1,2}(\Omega)$. Infatti:
(0) è ovvia
(1) è ovvia.
(2) $\quad |a(u_1,v) - a(u_2,v)| \le M \|u_1 - u_2\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \quad \forall u_1,\, u_2,\, v \in H_0^{1,2}(\Omega)$:

$$|a(u_1,v) - a(u_2,v)| = \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\; D_i[u_1(x) - u_2(x)]\; D_j\, v(x) \,+\, \lambda(x)[u_1(x) \,-\, u_2(x)]\, v(x) \right) \, dx \le$$

(per la diseguaglianza di Schwarz-Holder)

$$\le \max_{ij=1,\cdots n}(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|\lambda\|_\infty)\; \|u_1 - u_2\|_{H^{1,2}(\Omega)}\, \|v\|_{H^{1,2}(\Omega)}, \;\; \forall u_1, u_2, v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

(3) $\quad \exists \nu > 0 : \;\; a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \ge c(\nu) \|u_1 - u_2\|_H^2, \, \forall u_1, u_2 \in H_0^{1,2}(\Omega)$:

$$a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) =$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\; D_i u_1(x)\; D_j[u_1(x) - u_2(x)]\; dx \,-$$

$$- \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\; D_i u_2(x)\; D_j[u_1(x) - u_2(x)] \,+\, \lambda(x)[u_1(x) - u(x_2)]^2 \right) \, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\; D_i[u_1(x) - u_2(x)]\; D_j\,[u_1(x) - u_2(x)] \,+\, \lambda[u_1(x) - u_2(x)]^2 \right) \, dx \ge$$

$$\ge c(\nu)\;\; \|u_1 \,-\, u_2\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)}, \;\; \forall u_1,\, u_2 \in H_0^{1,2}(\Omega).$$

□

5 Il problema di Dirichlet per l'operatore completo

Consideriamo l'operatore in cui siano presenti anche le derivate di ordine inferiore a due, ed il coefficiente di u sia di segno qualunque, ossia:

$$B_\lambda u \,=\, -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij} D_i u) \,+\, \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u \,+\, \lambda(x) u, \tag{28}$$

dove la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ è uniformemente ellittica su Ω e a_{ij}, b_i, λ sono funzioni appartenenti a $L^\infty(\Omega)$.
Consideriamo la forma bilineare

$$b(u,v) \,=\, \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j v(x) \,+\, \sum_{i=1}^{n} a_i\, D_i u(x) v(x) \,+\, \lambda(x)\, u(x)\, v(x) \right) \, dx. \tag{29}$$

Vediamo sotto quali ipotesi su Ω la forma b risulta *coerciva* su $H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega)$. Per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega)$ si ha

$$b(u,u) \;=\; \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j u(x) \;+\; \sum_{i=1}^n b_i\, D_i u(x) u(x) \;+\; \lambda(x)\,[u(x)]^2 \right) \, dx$$

$$\text{(per l'uniforme ellitticità)} \tag{30}$$

$$b(u,u) \;\geq\; \nu |u|^2_{1,2,\Omega} \;+\; \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i\, D_i u(x) u(x) \;+\; \lambda(x)\,[u(x)]^2 \right) \, dx.$$

D'altra parte, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\left| \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i\, D_i u(x) u(x) \;+\; \lambda(x)\,[u(x)]^2 \right) \, dx \right| \;\leq\; \max_i \|b_i\|_{\infty,\Omega}\; |u|_{1,2,\Omega}\; \|u\|_{0,2,\Omega} \;+\; \|\lambda\|_{\infty,\Omega}\, \|u\|^2_{0,2,\Omega} \;\leq$$
$$\leq\; \max_i \|b_i\|_{\infty,\Omega} \left(\varepsilon |u|^2_{1,2,\Omega} \;+\; \frac{1}{2\varepsilon}\, \|u\|^2_{0,2,\Omega} \right) \;+\; \|\lambda\|_{\infty,\Omega} \|u\|^2_{0,2,\Omega}. \tag{31}$$

Da questa, posto $c_1 = max_i \|b_i\|_{\infty,\Omega}$, e da (30)

$$b(u,u) \geq (\nu \;-\; c_1\,\varepsilon) |u|^2_{1,2,\Omega} \;+\; \left(-\frac{c_1}{2\varepsilon} - \|\lambda\|_{\infty,\Omega} \right) \|u\|_{0,2,\Omega} \geq$$

$$\text{(per la diseguaglianza di Poincaré)} \tag{32}$$

$$\geq \left[\nu \;-\; c_1\,\varepsilon \;-\; d_\Omega \left(\frac{c_1}{2\varepsilon} + \|\lambda\|_{\infty,\Omega} \right) \right] |u|^2_{1,2,\Omega} = c(d_\Omega, c_1, \|\lambda\|_{\infty,\Omega}) |u|^2_{1,2,\Omega}.$$

Dove la costante $c(d_\Omega, c_1, \|\lambda\|_{\infty,\Omega})$ risulterà positiva se ε e d_Ω sono sufficientemente piccoli.
Queste considerazioni unite a quelle fatte nei pragrafi precedenti ci permettono di enunciare il seguente teorema

Teorema 5.1. *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Siano $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \cdots, n$, verificanti l'ipotesi di* **uniforme ellitticità** *della Definizione (1.2), b_i e $\lambda \in L^\infty(\Omega)$. Se $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1,2}(\Omega)$, allora esiste una ed una sola soluzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ del problema di Dirichlet (12) e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; c \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2\Omega} \;+\; \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)}. \right) \tag{33}$$

6 Teoria degli operatori vicini: introduzione.

Il concetto di *vicinanza* tra operatori introdotto da Campanato è contenuto nella seguente definizione

Definizione 6.1. *Siano $\mathcal{X}$ un insieme e $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$, A e B due operatori tali che $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$. Diremo che A è vicino a B, se esitono due costanti positive α, k, con $0 < k < 1$, tali che per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ si abbia:*

$$\|B(x_1) - B(x_2) - \alpha[A(x_1) - A(x_2)]\| \leq k \|B(x_1) - B(x_2)\|\,. \tag{34}$$

Ovviamente: *ogni operatore è vicino a sè stesso.* Infatti basta prendere nella diseguaglianza (34): $0 < \alpha < 2$ e $K = |1 - \alpha|$.
Il punto di partenza della *teoria degli operatori vicini* è il seguente teorema che è stato dimostrato da Campanato, prima nel caso di due spazi di Hilbert, e poi nella forma seguente.

Teorema 6.2. *Sia $\mathcal{X}$ un insieme, $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|.\|$, A, B siano due operatori tali che: $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$, inoltre sia A* vicino *a B . Sotto queste ipotesi, se B è una* bigezione *tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$, A è anche una bigezione tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$.*

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo i seguenti lemmi.
Siano $\mathcal{X}$ un insieme e $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\| \cdot \|$, A e B due operatori tali che $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$.

Lemma 6.3. *Sia A vicino a B. Valgono le seguenti maggiorazioni:*

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \leq \frac{\alpha}{1-k}\|A(x_1) - A(x_2)\| \tag{35}$$

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq \frac{k+1}{\alpha}\|B(x_1) - B(x_2)\| \tag{36}$$

La dimostrazione del Lemma è una banale conseguenza della maggiorazione (34)

Teorema 6.4. *Sia A vicino a B. L'operatore A è iniettivo se e solo se è iniettivo l'operatore B*

La dimostrazione segue dalle maggiorazioni (35) e (36) del Lemma 6.3.

Lemma 6.5. *Sia $B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ operatore iniettivo allora $\mathcal{X}$ è uno spazio metrico con la metrica indotta*

$$d_{\mathcal{X}}(u, v) = \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{X}. \tag{37}$$

La dimostrazione di questo asserto è ovvia.

Lemma 6.6. *Sia $B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ operatore bigettivo allora $\mathcal{X}$ è uno spazio metrico completo con la metrica indotta (37).*

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\{\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}}\}$, ovvero $\{B(u_n)\}_{n\in\mathcal{B}}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}$, e quindi esiste $U_\infty \in \mathcal{B}$ tale che

$$\|B(u_n) - U_\infty\|_{\mathcal{B}} \to 0.$$

Sia u_∞ tale che $u_\infty = B^{-1}(U_\infty)$. Quindi

$$d_{\mathcal{X}}(u_n, u_\infty) = \|B(u_n) - U_\infty\|_{\mathcal{B}} \to 0.$$

□

Dimostrazione. (Del Teorema 6.2).
L'iniettività è conseguenza del Teorema 6.4. Vediamo la *surgettività.*
Per ogni $f \in \mathcal{B}$ dobbiamo dimostrare l'esistenza di soluzione $u \in \mathcal{X}$ dell'equazione

$$A(u) = f, \tag{38}$$

ovvero

$$B(u) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f = F(u).$$

Ma per ogni $u \in \mathcal{X}$ abbiamo che $F(u) \in \mathcal{B}$ e quindi esiste uno ed un solo $U = \mathcal{T}u \in \mathcal{X}$ tale che

$$B(U) = F(u). \tag{39}$$

In questo modo abbiamo costruito un applicazione $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ che è una contrazione di $\mathcal{X}$ in sè. Infatti, se $u, v \in \mathcal{X}$ e $U = \mathcal{T}(u)$, $V = \mathcal{T}(v)$ allora

$$\begin{aligned} &d_{\mathcal{X}}(U, V) = \|B(U) - B(V)\|_{\mathcal{B}} = \|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{B}} = \\ &\|B(u) - B(v) - \alpha\,[A(u) - A(v)]\|_{\mathcal{B}} \leq K\,\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}} = K\,d_{\mathcal{X}}(u, v) \end{aligned} \tag{40}$$

D'altra parte per il Lemma 6.6, lo spazio $\{\mathcal{X},\, d_{\mathcal{X}}\}$ è completo. Quindi, per il *teorema delle contrazioni* esiste uno ed un solo $U \in \mathcal{X}$ che risolve (39), e quindi esiste uno ed un solo $u \in \mathcal{X}$ che risolve (38). Abbiamo così provato che A è anche bigettiva. □

Teorema 6.7. *Sia A vicino a B. Se l'operatore B è surgettivo allora anche l'operatore A è surgettivo.*

Dimostrazione. Definiamo sull'insieme $\mathcal{X}$ la relazione di equivalenza $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ nel seguente modo

$$u\,\mathcal{R}_{\mathcal{X}}\,v \iff B(u) = B(v).$$

Indichiamo con $[u]_{\mathcal{X}}$ la classe di equivalenza di u e sia $X = \mathcal{X}/\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$. Definiamo A^* e B^* le applicazioni da X in $\mathcal{B}$ come segue

$$B^*([u]_{\mathcal{X}}) = B(u), \qquad A^*([u]_{\mathcal{X}}) = A(u)$$

A^* è anch'essa vicina a B^* con costanti α, K e B^* è bigettiva. Quindi A^* è anche bigettiva, ovvero A è surgettiva. □

Una delle conseguenze di questi risultati è il seguente teorema

Teorema 6.8. *(Metododi continuità).*
Sia $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ uan famiglia di operatori di un'insieme $\mathcal{X}$ a valori in uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ verificanti le ipotesi

$$\textit{esiste } r \in [0,1] \textit{ tale che } A_r \textit{ è una bigezione;} \tag{41}$$

$$\begin{gathered}\textit{esiste } c > 0 \textit{ tale che per ogni } s,t \in [0,1] \textit{ e } u,v \in \mathcal{X} \textit{ vale} \\ \|A_t(u) - A_t(v) - [A_s(u) - A_s(v)]\|_{\mathcal{B}} \le c\,|t-s|\,\|A_t(u) - A_t(v)\|_{\mathcal{B}}\end{gathered} \tag{42}$$

allora per ogni $s \in [0,1]$ A_s è una bigezione.

Dimostrazione. poniamo $I = \{t \in [0,1] : \ A_t \text{ è una bigezione}\}$. La tesi segue dopo aver provato le seguenti proposizioni per il fatto che $[0,1]$ è un connesso:

(a) $I \neq \emptyset$;

(b) I è aperto;

(c) I è chiuso.

Dimostrazione di (a): $I \neq \emptyset$ perché $r \in I$.

Dimostrazione di (b): sia $t \in I$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $s \in [t-\delta, t+\delta] \cap [0,1]$ si abbia $k = c|t-s| < 1$. Per (42) si ha che A_s è vicina a A_t quindi per il Teorema 6.2 A_s è una bigezione.

Dimostrazione di (c): Sia $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ uan successone convergente a $t_\infty \in [0,1]$. Osserviamo che definitivamente risulta $k = c\,|t_n - t_\infty| < 1$. Anche in questo caso abbiamo che A_{t_∞} è vicino a A_{t_n} e quindi è una bigezione, dunque $t_\infty \in I$. □

7 Una dimostrazione del teorema di Lax-Milgram generalizzato

Teorema 7.1. *Siano H uno spazio di Hilbert e $a : H \times H \to \mathbf{R}$ una funzione, con le proprietà:*

(0) $a(0,v) = 0$ *per ogni* $v \in V$.

(1) $v \to a(u,v)$ *è lineare* $\forall u \in H,$;

(2) $|a(u_1,v) - a(u_2,v)| \le M\|u_1 - u_2\|_H\|v\|_H \quad \forall v \in H,$;

(3) $\exists \nu > 0 : \ a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \ge \nu\|u_1 - u_2\|_H^2, \forall u_1, u_2 \in H.$

(Se $u \to a(u,v)$ è lineare, la condizione (3) si riduce alla ben nota ipotesi di coercività).
Allora per ogni $F \in H^*$ esiste uno ed un solo $u \in H$ tale che, per ogni $v \in H$, sia verificata

$$a(u,v) = F(v). \tag{43}$$

Inoltre vale la maggiorazione

$$c(\nu)\,\|u\|_H \;\leq\; \|F\|_{H^*}. \tag{44}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'applicazione tra H e H^* defininita da: $\mathcal{A}(u)(v) = a(u,v)$. Dimostriamo che $\mathcal{A}$ è una bigezione tra H e H^*, ovvero per ogni $F \in H^*$ esiste una ed una sola soluzione $u \in H$ tale che

$$\mathcal{A}(u)(v) = F(v)\,, \quad \forall v \in H.$$

Questo equivale a provare la tesi del teorema, ovvero esiste una ed una sola soluzione $u \in H$ dell'equazione

$$a(u,v) = \mathcal{A}(u)(v) = F(v)\,, \quad \forall v \in H.$$

Per il Teorema 6.2, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{A}$ è *vicino* all'operatore $\mathcal{J} : H \to H^*$ definito da:

$$\mathcal{J}(u)(v) = (u,v)_H.$$

In particolare osserviamo che $\|\mathcal{J}(u)\|_{H^*} = \|u\|_H$. Inoltre, consideriamo l'operatore di Riesz $\mathcal{R} : H^* \to H$ definito da $\mathcal{R}(F) = w$, $F \in H^*, w \in H$, dove $F(v) = (w,v)_H$, $\forall v \in H$ and $\|w\|_H = \|F\|_{H^*}$. Allora, in particolare, $(\mathcal{R}(\mathcal{A}(u)), v)_H = \mathcal{A}(u)(v) = a(u,v)$, e $\mathcal{R} = \mathcal{J}^{-1}$, così che $\mathcal{J}$ è una bigezione tra H e H^*. Possimo quindi ottenere la tesi del teorema dimostrando la diseguaglianza (34), per gli operatori $\mathcal{J}$ e $\mathcal{A}$, ovvero dimostrando che esistono due costanti positive α e $k \in (0,1)$ tali che:

$$\|\mathcal{J}(u_1) - \mathcal{J}(u_2) - \alpha[\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)]\|_{H^*} \leq k\|\mathcal{J}(u_1) - \mathcal{J}(u_2)\|_{H^*}.$$

Osserviamo che :

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{J}(u_1) - \mathcal{J}(u_2) - \alpha[\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)]\|^2_{H^*} = \\
&\quad = \|u_1 - u_2 - \alpha[\mathcal{R}(\mathcal{A}(u_1)) - \mathcal{R}(\mathcal{A}(u_2))]\|^2_H = \\
&\quad = \|u_1 - u_2\|^2_H + \alpha^2\|\mathcal{R}(\mathcal{A}(u_1)) - \mathcal{R}(\mathcal{A}(u_2))\|^2_H + \\
&\quad -2\alpha(\mathcal{R}(\mathcal{A}(u_1)) - \mathcal{R}(\mathcal{A}(u_2)), u_1 - u_2)_H = \\
&\quad = \|u_1 - u_2\|^2_H + \alpha^2\|\mathcal{R}(\mathcal{A}(u_1)) - \mathcal{R}(\mathcal{A}(u_2))\|^2_H + \\
&\quad -2\alpha[a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2)] \leq
\end{aligned}$$

(per le ipotesi (2) e (3))

$$\begin{aligned}
&\leq \|u_1 - u_2\|^2_H + \alpha^2 M^2\|u_1 - u_2\|^2_H - 2\alpha\nu\|u_1 - u_2\|^2_H = \\
&= [1 + \alpha^2 M^2 - 2\alpha\nu]\|u_1 - u_2\|^2_H = k\|\mathcal{J}(u_1) - \mathcal{J}(u_2)\|^2_{H^*}
\end{aligned}$$

La maggiorazione segue dall'ipotesi (3) prendendo $u_2 = 0$ e dal fatto che F è un operatore lineare e continuo. $\square$

Un'altro esempio di applicazione di questo Teorema è il seguente.
Consideriamo un aperto limitato Ω in $\mathbf{R}^n$, con bordo sufficientemente regolare e la forma

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, Du) D_i v\, dx$$

where $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$, $u \in H^1_0(\Omega)$. On $a(\cdot,\cdot)$ con le ipotesi seguenti:

(a) $a_i(x,0) = 0$ q.o. in Ω, per $i = 1, \cdots, n$.([1])
(b) $a_i(x,p)$ è misurabile e limitato in x, e continua in $p \in \mathbf{R}^n$.
(c) $\exists \nu > 0$ tale che $\forall p, \overline{p} \in \mathbf{R}^n$, $\forall x \in \Omega$:

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,p) - a_i(x,\overline{p})] (p_i - \overline{p}_i) \geq \nu \|p - \overline{p}\|_n^2.$$

(d) $\exists M > 0$ tale che $\forall p, \overline{p} \in \mathbf{R}^n$, $\forall x \in \Omega$:

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,p) - a_i(x,\overline{p})]^2 \leq M \|p - \overline{p}\|_n^2.$$

sotto queste ipotesi, per ogni $f \in H^{-1}(\Omega)$ esiste una ed una sola soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, Du) D_i v \, dx =< f, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ovvero, per ogni $f \in H^{-1,2}(\Omega)$ esiste una ed una sola soluzione $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} D_i(a_i(x, Du)) = f(x) & \text{su } \Omega \\ u = 0 & su\partial\Omega. \end{cases} \tag{45}$$

8 Differenziabilità all'interno delle soluzioni di un'equazione in forma di divergenza

Per affrontare il problema della differenziabilità delle soluzioni dobbiamo utilizzare i seguenti lemmi di Nirenberg.

Lemma 8.1. *Sia $u \in W^{1,q}(B(0,\sigma))$, $q \geq 1$, $t \in (0,1)$ e $|h| < (1-t)\sigma$ allora*

$$\|\tau_{i,h}\, u\|_{L^q(B(0,t\sigma))} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^q(B(0,\sigma))}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{46}$$

[1] Questa ipotesi non è restrittiva. Infatti dal problema

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, Du) D_i v \, dx =< f, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ci possiamo ricondurre al seguente

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} [a_i(x, Du) - a_i(x,0)] D_i v \, dx =< f, v > + < \sum_{i}^{n} D_i\, a_i(x,0),\, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Quindi si pone $\tilde{a}_i(x, Du) = a_i(x, Du) - a_i(x,0)$ e $F = f - \sum_{i=1}^{n} D_i a_i(x, Du)$ ottenendo

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \tilde{a}_i(x, Du) D_i v \, dx =< F, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

dove

$$\tau_{i,h}u(x) \;=\; \frac{u(x+he_i)\;-\;u(x)}{h}, \tag{47}$$

essendo $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

$$\tau_{i,h}u(x) \;=\; \frac{1}{h}\int_0^1 \left(\frac{d}{ds}\,u(x+she_i)\right)\,ds \;=\; \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\,u(x+she_i)\right)\,ds.$$

$$\int_{B(0,t\sigma)} |\tau_{i,h}u(x)|^q\;dx \;\le\; \int_{B(0,t\sigma)} \left[\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\,u(x+she_i)\right|^q\;ds\right]\;dx \;=$$

$$=\int_0^1 \left[\int_{B(0,t\sigma)} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\,u(x+she_i)\right|^q\;dx\right]\;ds \;=$$

posto $y = x + she_i$

$$=\int_0^1 \left[\int_{B(she_i,t\sigma)} \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\,u(y)\right|^q\;dy\right]\;ds \;\le\; \int_0^1 \left[\int_{B(0,\sigma)} \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\,u(y)\right|^q\;dy\right]\;ds \;=\; \|D_iu\|^q_{L^q(B(0,\sigma))}.$$

Abbiamo utilizzato il fatto che, essendo $s \in (0,1)$, si ha
$t\sigma + s|h| \le t\sigma + |h| \le t\sigma + (1-t)\sigma \le \sigma.$ □

Lemma 8.2. *Siano $u \in L^q(B(0,\sigma))$, $1 < q < +\infty$, $M > 0$, tali che per ogni $|h| < (1-t)\sigma$ si abbia*

$$\|\tau_{i,h}\|_{L^q(0,t\sigma)} \;\le\; M, \quad i = 1,\cdots,n, \tag{48}$$

allora $u \in W^{1,q}(B(0,\sigma))$

$$\|D_iu\|_{L^q(0,\sigma)} \;\le\; M, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{49}$$

Dimostrazione. Fissiamo i, $0 < i \le n$. Dato che $u \in L^q(B(0,\sigma))$ è riflessivo, essendo $1 < q < +\infty$, sappiamo che esistono $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione infinitesima e $v_i \in L^q(B(0,\sigma))$ tali che

$$\tau_{i,h_n}v \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_i, \text{ debole in } L^q(B(0,\sigma)).$$

In particolare, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B(0,t\sigma))$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,t\sigma)} \tau_{i,h_n}u(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; \int_{B(0,t\sigma)} v_i(x)\,\varphi(x)\;dx.$$

Da cui, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B(0,t\sigma))$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,t\sigma)} u(x)\,\tau_{i,-h_n}\varphi(x)\,dx \;=\; -\int_{B(0,\sigma)} v_i(x)\,\varphi(x)\;dx. \tag{50}$$

Infatti, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B(0,t\sigma))$, vale

$$\int_{B(0,t\sigma)} \tau_{i,h_n}u(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; -\int_{B(0,\sigma)} u(x)\,\tau_{i,-h_n}\varphi(x)\,dx,$$

perché

$$\int_{B(0,t\sigma)} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} \varphi(x)\ dx = \frac{1}{h}\left[\int_{B(0,t\sigma)} u(x+he_i)\,\varphi(x)\ dx\ - \int_{B(0,t\sigma)} u(x)\,\varphi(x)\ dx\right] =$$

nel primo integrale efffettuiamo il cambio di variabile $y = x + he_i$, nel secondo $y = x$,

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{B(he_i,t\sigma)} u(y)\,\varphi(y-he_i)\ dy\ - \int_{B(0,t\sigma)} u(y)\,\varphi(y)\ dy\right] =$$

essendo $supp\,\varphi \subset B(0,t\sigma)$, quindi $supp\,\varphi(y-he_i) \subset B(he_i,t\sigma) \subset B(0,\sigma)$, risulta

$$\frac{1}{h}\left[\int_{B(0,\sigma)} u(y)\,\varphi(y-he_i)\ dy\ - \int_{B(0,t\sigma)} u(y)\,\varphi(y)\ dy\right] = -\int_{B(0,\sigma)} u(y)\,\frac{\varphi(y-he_i) - \varphi(y)}{-h}\ dy =$$

$$= -\int_{B(0,\sigma)} u(y)\,\tau_{i,-h}\varphi(y)\ dy.$$

Possiamo applicare il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue in quanto, per q.o. $x \in B(0,\sigma)$, risulta

$$|u(x)\ \tau_{i,-h_n}\varphi(x)| < c|u(x)|\,\|D_i\varphi(x)\|_{\infty,B(0,\sigma)},$$

di conseguenza, tenuto conto del fatto che $supp\,\varphi \subset B(0,\sigma)$, possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B(0,\sigma)} u(x)\,\tau_{i,-h_n}\varphi(x)\,dx = \int_{B(0,\sigma)} \lim_{n\to+\infty}\left(u(x)\,\tau_{i,-h_n}\varphi(x)\right) =$$

$$= \int_{B(0,\sigma)} u(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx = \int_{B(0,t\sigma)} u(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx.$$

Da questa e da (50), per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B(0,t\sigma))$, otteniamo

$$\int_{B(0,t\sigma)} u(x)\,D_i\varphi(x) = -\int_{B(0,\sigma)} v_i\,\varphi(x)\ dx.$$

Ciò assicura che $u \in W^{1,p}(B(0,t\sigma))$ e $D_iu = v_i$ in senso debole in $B(0,t\sigma)$, per ogni $t \in (0,1)$, e quindi anche in $B(0,\sigma)$.
Dimostriamo la maggiorazione (49). Dall'ipotesi (48), per ogni $\psi \in L^{q'}(B(0,t\sigma))$, si ha

$$\left|\int_{B(0,t\sigma)} \tau_{i,h_n}u(x)\,\psi(x)\ dx\right| \le M\ \|\psi\|_{L^{q'}(B(0,t\sigma))}.$$

Per quanto visto in precedenza, passando al limite

$$\left|\int_{B(0,t\sigma)} D_i\,u(x)\,\psi(x)\ dx\right| \le M\ \|\psi\|_{L^{q'}(B(0,t\sigma))}.$$

Quindi la tesi. □

Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ e $u \in H^1(\Omega)$ soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\,D_ju(x)] = f(x),\ \ x \in \Omega. \tag{51}$$

Teorema 8.3. *Supponiamo che la matrice* $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ *sia uniformemente ellitica su* Ω, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ *ed* $f \in L^2(\Omega)$. *Allora per ogni coppia di aperti* $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$ *si ha che* $u \in H^2(\Omega')$ *e vale la maggiorazione*

$$|u|_{1,2,\Omega'} \,\le\, c\big\{\|f\|_{L^2(\Omega'')} \,+\, \|u\|_{1,2,\Omega''}\big\} \tag{52}$$

Dimostrazione. Presi Ω', Ω'' tali che $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$, posto $\delta = dist\,(\partial\Omega', \partial\Omega'')$, $\Omega_\sigma = \{x : x \in \Omega'' \wedge dist(x, \partial\Omega'') \ge \sigma\}$, consideriamo la funzione $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ così definita

$$\theta(x) \,=\, \begin{cases} 1, & \text{su } \Omega''_\delta \\ \\ 0, & \text{fuori di } \Omega''_{\frac{2}{3}\delta}. \end{cases} \tag{53}$$

L'equazione (51) può essere scritta, per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, nella forma seguente

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j\, \varphi(x)\ dx \,=\, \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\ dx. \tag{54}$$

In questa equazione possiamo prendere come funzione test $\varphi = \theta\,\psi$, con $\psi \in H^1(\Omega)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, [D_j\theta(x)\psi(x) \,+\, \theta(x)\, D_j\psi(x)]\ dx \,=\, \int_\Omega f(x)\, \theta(x)\, \psi(x)\ dx, \tag{55}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, \theta(x)\, D_j\psi(x)\ dx \,=\, & \int_\Omega f(x)\, \theta(x)\, \psi(x)\ dx\, + \\ & - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j\theta(x)\, \psi(x)\ dx \end{aligned} \tag{56}$$

Poniamo

$$F(x) \,=\, f(x)\, \theta(x) \,-\, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j\theta(x),\ \ \mathcal{U}(x) = \theta\, u.$$

Da (56) segue

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i\mathcal{U}(x)\ D_j\psi(x)\ dx \,=\! \int_\Omega F(x)\ \psi(x)\ dx \,+\, \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i\theta(x)\, D_j\psi(x)\ u(x)\ dx. \tag{57}$$

Questa relazione vale in particolare per ogni $\psi \in H^1_0(\Omega''_{\frac{\delta}{2}})$ prolungata a zero fuori di $\Omega''_{\frac{\delta}{2}}$. Consideriamo per questa funzione test il seguente rapporto incrementale

$$\tau_{r,-h}\psi(x) \,=\, \frac{\psi(x_1, \cdots, x_{r-1}, x_r - h, x_{r+1}, \cdots, x_n) \,-\, \psi(x)}{-h},$$

dove $0 < |h| < \dfrac{\delta}{2}$. Dato che $\tau_{r,-h}\psi \in H^1_0(\Omega'')$, possiamo prendere questa funzione in (57) come funzione test ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} a_{ij}(x)\, D_i\mathcal{U}(x)\ D_j[\tau_{r,-h}\psi(x)]\ dx \,=\, & \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} F(x)\ \tau_{r,-h}\psi(x)\ dx\, + \\ + \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i\theta(x)\, D_j[\tau_{r,-h}\psi(x)]\ u(x)\ dx. & \end{aligned} \tag{58}$$

Valutiamo ciascuno dei termini che compaiono nell'equazione a partire dal primo membro che può essere trasformato come segue([2])

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \tau_{r,h}[a_{ij}(x)\, D_i\mathcal{U}(x)]\; D_j\psi(x)\;\, dx \;=\; \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(x+he_r)\, \tau_{r,h}(D_i\theta(x))\, D_j\psi(x) + \\
&+ \tau_{r,h}(a_{ij}(x))\, D_i\mathcal{U}(x)\, D_j\psi(x)]\;\, dx.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Sostituendo in (58) e (59) ricaviamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} a_{ij}(x+he_r)\, \tau_{r,h}[D_i\mathcal{U}(x)]\; D_j\psi(x)\;\, dx \;=\; -\int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \{F(x)\, \tau_{r,-h}\psi(x) + \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i\theta(x)\, D_j\tau_{r,-h}[\psi(x)]\, u(x) + \\
&- \tau_{r,h}[a_{ij}(x)]\, D_i\mathcal{U}(x)\, D_j\psi(x)\}\;\, dx \;=\; I_1 \;+\; I_2 \;+\; I_3.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Maggioriamo ciascuno dei termini al secondo membro di(60), tenendo conto della definizione della funzione θ.

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_{\Omega''_{\frac{2}{3}\delta}} F(x)\, \tau_{r,-h}\psi(x)\;\, dx \right| \;\le\; \|F\|_{L^2(\Omega'')}\; \|\tau_{r,-h}\psi\|_{L^2(\Omega''_{\frac{2}{3}\delta})} \\
&\text{(per il Lemma 8.1)} \\
&\le\; \|F\|_{L^2(\Omega'')}\; |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \;\le \\
&\le\; 2 \left(\|f\|_{L^2(\Omega'')} \;+\; \left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, D_i u\, D_j\theta \right\|_{L^2(\Omega'')} \right) |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \;\le \\
&\le c(\|a_{ij}\|_\infty,\, n,\, \delta)\; (\|f\|_{0,\Omega''} \;+\; |u|_{1,2,\Omega})\; |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}}\,.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
&|I_2| \;=\; \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \tau_{r,h}[a_{ij}(x)\, u(x)\, D_i\theta(x)]\, D_j\psi\;\, dx \right| \;\le \\
&\le \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} a_{ij}(x+he_r)\, [\tau_{r,h}u(x)]\, D_j\theta(x+he_r)\, D_j\psi\;\, dx \right| + \\
&\le \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \tau_{r,h}[a_{ij}(x)\, D_j\theta(x)]\, u(x)\, D_j\psi\;\, dx \right| \;\le \\
&\le \max_{i,j=1,\cdots,n} \|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, c(\delta)\, \|\tau_{r,h}u\|_{0,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}}\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \;+\; \max_{i,j=1,\cdots,n} \|D_r a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, c(\delta)\, \|u\|_{0,\Omega}\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \;\le \\
&\le\; c(\delta)\, \max_{i,j=1,\cdots,n} \|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, |u|_{1,2,\Omega''}\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \;+\; c(\delta)\, \max_{i,j=1,\cdots,n} \|D_r a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, \|u\|_{0,\Omega}\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}}\,.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

[2] Utilizziamo l'identità $\tau_{r,h}[f(x)\, g(x)] \;=\; f(x+he_r)\, \tau_{r,h}\, g(x) \;+\; [\tau_{r,h} f(x)] g(x)$

$$|I_3| \leq \max_{1,j=1,\cdots,n} \|D_r a_{ij}\|_{\infty,\Omega} \, |\mathcal{U}|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} . \tag{63}$$

Da (60), tenuto conto di (61), (62), (63), ricaviamo le seguenti diseguaglianze

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} a_{ij}(x+he_r)\tau_{r,h}[D_i\mathcal{U}(x)]\, D_j\psi(x)\; dx \right| \leq \\
&\leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, n, \delta)\, (\|f\|_{0,\Omega''} + |u|_{1,2,\Omega''})\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} + \\
&+ c(\|D_r a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, n, \delta)\, \|u\|_{0,\Omega''})\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} + \\
&+ \max_{i,j=1,\cdots,n} \|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}\, |\mathcal{U}|_{1,2,\Omega''_{\delta}})\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \leq \\
&\leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|D_r a_{ij}\|, n, \delta)\, [\|f\|_{0,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}]\, |\psi|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} .
\end{aligned} \tag{64}$$

Sostituiamo in quest'ultima diseguaglianza $\psi = \tau_{r,h}\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} a_{ij}(x+he_r) D_i[\tau_{r,h}\mathcal{U}(x)]\, D_j[\tau_{r,h}\mathcal{U}]\; dx \right| \leq \\
&\leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|D_r a_{ij}\|, n, \delta)\, [\|f\|_{0,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}]\, |\tau_{r,h}\mathcal{U}|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} .
\end{aligned} \tag{65}$$

Tenendo conto della coercività possiamo dedurre

$$\nu\, |\tau_{r,h}\mathcal{U}(x)|^2_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|D_r a_{ij}\|, n, \delta)\, [\|f\|_{0,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}]\, |\tau_{r,h}\mathcal{U}|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} . \tag{66}$$

Ovvero

$$\nu\, |\tau_{r,h}\mathcal{U}(x)|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|D_r a_{ij}\|, n, \delta)\, [\|f\|_{0,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}]. \tag{67}$$

Da questa utilizziamo il Lemma 8.2 ottenendo:

$$\nu\, |D_r\mathcal{U}(x)|_{1,2,\Omega''_{\frac{\delta}{2}}} \leq c(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}, \|D_r a_{ij}\|, n, \delta)\, [\|f\|_{0,\Omega''} + \|u\|_{1,2,\Omega''}]. \tag{68}$$

La tesi segue in quanto $\mathcal{U} = u$ su Ω'. □

Sia ora $u \in H^1(\Omega)$ soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione completa

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, D_i u(x) + a(x)\, u(x) = f(x) \;\; x \in \Omega. \tag{69}$$

Teorema 8.4. *Supponiamo che la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ sia uniformemente ellitica su Ω, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ mentre a_i e a appartengono a $L^\infty(\Omega)$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Allora per ogni coppia di aperti $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$ si ha che $u \in H^2(\Omega')$ e vale la maggiorazione*

$$|u|_{1,2,\Omega'} \leq c(a_{ij}, a_i, a, \nu) \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{1,2,\Omega''} \right\} \tag{70}$$

Dimostrazione. Basta considerare l'equazione

$$- \sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] \;=\; - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, D_i u(x) \;-\; a(x)\, u(x) \;+\; f(x) \;\; x \in \Omega. \tag{71}$$

Il secondo membro, per le ipotesi fatte appartiene a $L^2(\Omega)$, applicando il Teorema 8.3 otteniamo la tesi. □

Aumentando le ipotesi di regolarità dei dati aumenta anche la regolarità della soluzione come si vede dal seguente teorema.

Teorema 8.5. *Supponiamo che la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ sia uniformemente ellitica su Ω, $a_{ij} \in C^{k+1}(\Omega)$ mentre a_i e a appartengono a $C^k(\Omega)$ ed $f \in H^k(\Omega)$. Allora per ogni coppia di aperti $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$ si ha che se u è soluzione in $H^1_0(\Omega)$ risulta $u \in H^{k+2}(\Omega')$ e vale la maggiorazione*

$$|u|_{k+2,2,\Omega'} \;\leq\; c(a_{ij}, a_i, a, \nu)\, \{\|f\|_{k,2,\Omega''} \;+\; \|u\|_{1,2,\Omega''}\} \tag{72}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Se $k = 0$ è verificato per il Teorema 8.4. Dimostriamo l'induttività della proposizione. Derivando $\alpha-$volte, con $|\alpha| = k$, primo e secondo membro dell'equazione (69), otteniamo la seguente

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_i D^\alpha u(x)] \;=\; &- \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq 0} \binom{\alpha}{\beta} D_j[D^\beta a_{ij}(x)\, D^{\alpha-\beta} D_i u(x)] + \\ &- \textstyle\sum_{i=1}^{n} D^\alpha[a_i(x)\, D_i u(x)] \;-\; D^\alpha[a(x)\, u(x)] \;+\; D^\alpha f(x) \;\; x \in \Omega. \end{aligned} \tag{73}$$

La tesi segue dal Teorema 8.4 applicato alla funzione $w = D^\alpha u$, ed osservando che per le ipotesi fatte il secondo membro dell'equazione (73) appartiene a $L^2(\Omega)$. □

9 Differenziabilità al bordo delle soluzioni di un'equazione in forma di divergenza

Consideriamo $B^+_r = \{x : x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \vee (\|x\| < r) \vee (x_n > 0)\}$, $\Gamma = B^+_r \cap \{x : x_n = 0\}$, e sia u appartenente a $H^1(B^+_r)$ soluzione (in senso debole) del problema

$$\begin{cases} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_i u(x)] \;=\; f(x), \;\; x \in B^+_r, \\ \\ u(x) \;=\; 0, \;\; x \in \Gamma_r. \end{cases} \tag{74}$$

Teorema 9.1. *Supponiamo che la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ sia uniformemente ellitica su B^+_r, $a_{ij} \in C^1(\overline{B^+_r})$ ed $f \in L^2(B^+_r)$. Allora per ogni $\rho \in (0, r)$ si ha che $u \in H^2(B^+_\rho)$ e vale la maggiorazione*

$$|u|_{1,2,B^+_\rho} \;\leq\; c(\nu, \rho, r, n, a_{ij}) \left\{\|f\|_{L^2(B^+_r)} \;+\; \|u\|_{1,2,B^+_r}\right\} \tag{75}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $W^1_{\gamma_0}(B_r^+)$ la chiusura nella norma di $W^1(B_r^+)$ dello spazio delle funzioni $C^1(\overline{B_r^+})$ che si annullano in un intorno di Γ_r. Scriviamo il problema (74) nella forma

$$\begin{cases} u \in W^1_{\gamma_0}(B_r^+), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j\, \varphi(x)\ dx \,=\, \int_{B_r^+} f(x)\, \varphi(x)\ dx,\ \ \forall \varphi \in W_0^1(B_r^+). \end{cases} \tag{76}$$

Consideriamo ora la funzione smussante $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definita in maniera analoga a quella vista nella dimostrazione del Teorema 8.3: $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 1$ su B_ρ, $\theta = 0$ fuori di $B_{\frac{r+\rho}{2}}$. Consideriamo funzioni test del tipo $\varphi = \theta\psi$, con ψ appartenente a $W^1_{\gamma_0}(B_r^+)$ (quindi $\varphi \in W_0^1(B_r^+)$). Sostituiamo nell'equazione, procedendo in maniera simile a quella vista all'interno ponendo

$$F(x) \,=\, f(x)\, \theta(x) \,-\, \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(x)\, D_i u(x) D_j \theta(x),\ \ \mathcal{U}(x) \,=\, \theta(x)\, u(x),$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_i \mathcal{U}(x)\ D_j \psi(x)\ dx \,=\, \int_{B_r^+} F(x)\ \psi(x)\ dx\, + \\ &+ \int_{B_r^+} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_i\theta(x)\, D_j\psi(x)\ u(x)\ dx. \end{aligned} \tag{77}$$

Questa equazione vale in particolare per le funzioni ψ appartenenti a $W^1_{\gamma_0}(B_r^+)$ che sono nulle fuori di $B^+_{\frac{r+\rho}{2}}$. Possiamo quindi considerare i rapporti incrementali $\tau_{r,-h}\, \psi(x)$ per $r = 1, \cdots, (n-1)$, ed $|h| < \dfrac{r+\rho}{2}$. Poiché ψ appartiene a $W_0^1(B^+_{\frac{r+\rho}{2}})$ può essere scelta come funzione test in (77). Procedendo nello stesso modo visto nel paragrafo precedente per la regolarità all'interno otteniamo la diseguaglianza

$$\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{n-1} \int_{B_\rho^+} |D_r D_i u(x)|^2\ dx \,\le\, c(\nu, \rho, r, n, a_{ij})\, \{\|f\|^2_{0,B_r^+} \,+\, \|u\|_{1,B_r^+}\}. \tag{78}$$

Resta da maggiorare il termine $D_{nn}u$. Dall'equazione (77) ricaviamo

$$\begin{aligned} &\int_{B_r^+} a_{nn}(x)\, D_n \mathcal{U}(x)\, D_n\, \psi(x)\ dx \,=\, \int_{B_r^+} F(x)\, \varphi(x)\ dx\, + \\ &\sum_{i,j=1}^n \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_i\theta(x)\, D_j\, \psi(x)\, u(x)\ dx\, + \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_i \mathcal{U}(x)\, D_n D_j\, \psi(x)\ dx \,= \\ &= \int_{B_r^+} H(x)\, \psi(x)\ dx,\ \ \forall \psi \in W_0^1(B_r^+). \end{aligned} \tag{79}$$

Dove $H(x) \,=\, f(x) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i\theta(x)\, u(x) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(x)\, D_i u(x)$. Prendiamo ([3]) $\psi(x) \,=\, \dfrac{\xi(x)}{a_{nn}(x)}$, dove $\xi \in C_0^\infty(B_\rho^+)$. Ovviamente, per le ipotesi fatte sui coefficienti $\psi \in W_0^1(B_\rho^+)$.

[3] Dall'ipotesi di uniforme ellitticità si ricava che $a_{nn} \ge \nu$.

Per le ipotesi fatte e per quanto dimostrato sopra risulta $H \in L^2(B_\rho^+)$.
Sostituendo in (79) ricaviamo la seguente equazione

$$\int_{B_\rho^+} D_n u(x)\, D_n \xi(x)\; dx \;=\; \int_{B_\rho^+} \left[H(x)\, \frac{\xi(x)}{a_{nn}(x)} \;+\; D_n u(x)\, \frac{\xi(x)\, D_{nn} a_{nn}(x)}{a_{nn}(x)} \right]\; dx, \;\; \forall \xi \in C_0^\infty(B_\rho^+). \tag{80}$$

Posto

$$G(x) \;=\; \frac{H(x) - D_n u(x) D_n a_{nn}(x)}{a_{nn}(x)}$$

osserviamo che per quanto visto in precedenza $G \in L^2(B_\rho^+)$. Quindi l'equazione (80) può essere scritta nella forma

$$\int_{B_\rho^+} D_n u(x)\, D_n \xi(x)\; dx \;=\; \int_{B_\rho^+} G(x)\, \xi(x)\; dx, \;\; \forall \xi \in C_0^\infty(B_\rho^+). \tag{81}$$

Da questa si deduce che esite $D_{nn}u$ in B_ρ^+, che appartiene a $L^2(B_\rho^+)$ e $D_{nn}u = G$ e quindi la tesi. □

Teorema 9.2. *Sia $u \in H^1_{\gamma_0}(B_r^+)$ soluzione del Problema (74) con $a_{ij} \in C^k(B_r^+)$ e $f_i \in H^k(B_r^+)$. Se $u \in H^k(B_r^+)$ allora $u \in H^{k+1}(B_\rho^+)$, con $\rho < r$, e si ha*

$$\|u\|_{k+1,2,B_r^+} \;\le\; c(a_{ij}, n, r)\, \{ \|u_{k,2,B_r^+}\| \;+\; \|f\|_{0,B_r^+} \}. \tag{82}$$

Dimostrazione. Si procede per induzione, ma a differenza della dimosrazione del Teorema 73 si opera su α_n.
Derivado l'equazione 74 e posto

$$G(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\beta \le \alpha, \beta \ne 0} \binom{\alpha}{\beta} D_j[D^\beta a_{ij}(x)\, D^{\alpha-\beta} D_i u(x)] \tag{83}$$

$$\tag{84}$$

$$g(x) \;=\; D^\alpha f(x) \;\; x \in \Omega. \tag{85}$$

Se $|\alpha| = k-1$. Dimostriamo che $D^\alpha D_{ij} u \in L^2(B_\rho^+)$, $i, j = 1, \cdots, n$. La funzione $w = D^\alpha u$ verifica l'equazione 74 con g, G appartenenti a $L^2(B_r^+)$.
Per $k = 0$ segue dal Teorema 9.1.
Supponiamo di aver dimostrato per $\alpha_n = h$ verifichiamo per $\alpha_n = h+1$. Se $|\alpha| = k+1$ è tale che $\alpha_n = h+1$ possiamo scrivere per $i \ne n$:

$$D^\alpha D_{ij} u \;=\; D^\beta D_{nj} u, \;\; i, j = 1, \cdots, n, \;\; \beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, h). \tag{86}$$

La tesi è valida per $i \ne n$. Resta da provare per $D^\alpha D_{nn} u$. Dall'equazione ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^+} a_{nn}(x)\, D_n w\, D_n\, \psi(x)\;\; dx \;=\; \int_{B_r^+} G(x)\, \varphi(x)\;\; dx + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_i w(x)\, D_j\, \psi(x)\;\; dx + \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \int_{B_r^+} a_{in}(x)\, D_i w(x)\, D_n\, D_j\, \psi(x)\;\; dx \;-\; \sum_{j=1}^{n-1} \int_{B_r^+} a_{nj}(x)\, D_n w(x)\;\, D_j\, \psi(x)\;\; dx = \\
&= \int_{B_r^+} H(x)\, \psi(x)\;\; dx, \;\;\; \forall \psi \in W_0^1(B_r^+).
\end{aligned} \tag{87}$$

Da cui

$$\int_{B_\rho^+} D_n w(x)\, D_n\xi(x)\; dx \;=\; \int_{B_\rho^+} \left[H(x)\, \frac{\xi(x)}{a_{nn}(x)} \;+\; D_n w(x)\, \frac{\xi(x)\, D_{nn} a_{nn}(x)}{a_{nn}(x)} \right] \; dx, \;\; \forall \xi \in C_0^\infty(B_\rho^+). \qquad (88)$$

Posto

$$\Theta(x) \;=\; \frac{H(x) - D_n u(x) D_n a_{nn}(x)}{a_{nn}(x)}$$

osserviamo che per quanto visto in precedenza $\Theta \in L^2(B_\rho^+)$. Quindi l'equazione (80) può essere scritta nella forma

$$\int_{B_\rho^+} D_n w(x)\, D_n\xi(x)\; dx \;=\; \int_{B_\rho^+} \Theta(x)\, \xi(x)\; dx, \;\; \forall \xi \in C_0^\infty(B_\rho^+). \qquad (89)$$

Da questa si deduce che esite $D_{nn} w$ in B_ρ^+, che appartiene a $L^2(B_\rho^+)$ e $D_{nn} w = \Theta$ e quindi la tesi.

□

10 Differenziabilità globale della soluzione.

Teorema 10.1. *Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1, $f \in L^2(\Omega)$, la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ uniformemente ellittica su Ω con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora la soluzione debole $u \in H^{1,2}(\Omega)$, del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] \;=\; f(x), \;\; x \in \Omega, \\ \\ u(x) \;=\; 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (90)$$

appartiene a $H^{2,2}(\Omega)$ e vale la maggiorazione

$$|u|_{2,2,\Omega} \;\le\; c(a_{ij}, n, \Omega)\; \{\|f\|_{0,\Omega} \;+\; \|u\|_{1,2,\Omega}\}\,. \qquad (91)$$

Dimostrazione. Ricopriamo Ω con una famiglia di aperti Ω', Ω'', $U_1, \cdots, U_n$, $V_1, \cdots, V_n$ scelti nel modo che segue:

(1) $\Omega' \subset \Omega'' \subset\subset \Omega$;

(2) U_i, V_i sono intorni di centro $x_i \in \partial\Omega$, con $i = 1, \cdots, n$;

(3) $V_i \subset U_i$, con $i = 1, \cdots, n$;

(4) $\cup_{i=1}^n V_i \supset \partial\Omega$;

(5) $\Omega \subset \cup_{i=1}^n V_i \cap \Omega'$.

Dal Teorema 8.3 sappiamo che $u \in H^2(\Omega')$ e vale la maggiorazione

$$|u|_{1,2,\Omega'} \;\le\; c\left\{\|f\|_{L^2(\Omega'')} \;+\; \|u\|_{1,2,\Omega''}\right\}. \qquad (92)$$

Resta da stabilire la regolarità al bordo della soluzione. A questo scopo, fissato $i \in \{1, \cdots, n\}$, su ogni U_i possiamo considerare il diffeomorfismo $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \cdots, \Phi_n(x))$ che manda $U_i \cap \Omega$ in un aperto di $\mathbb{R}^n$ definito da

$$\begin{aligned} &\Phi_i(x) = x_i, \;\; i = 1, \cdots, n-1; \\ &\Phi_n(x) \;=\; \psi(x') \;-\; x_n, \;\; \text{essendo } x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}), \end{aligned} \qquad (93)$$

dove ψ è la funzione di $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 il cui grafico coincide con $\partial\Omega$ in U_i. Φ è tale che tale che

$$\Phi(U_i \cap \Omega) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \ y_n > 0\}, \quad \text{e } \Phi(U_i \cap \partial\Omega) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \ y_n = 0\}$$

Si vede facilmente che $|det\, Jac\, \Phi| = 1$
Sia $\tilde{u}$ tale che $u(x) = (\tilde{u} \circ \Phi)(x)$, $x \in U_i \cap \overline{\Omega}$.
L'equazione (90) può essere scritta, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, nella forma seguente

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u(x)\, D_j\, \varphi(x)\ \ dx \ = \ \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\ \ dx, \tag{94}$$

che vale anche per tutte le funzioni test $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega \cap U_i)$.
Tenuto conto del fatto che $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} \ = \ \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}(\Phi(x))}{\partial y_h} \frac{\partial \Phi_h(x)}{\partial x_i}$, da (94) con il cambio di variabile $x = \Phi^{-1}(y)$ otteniamo ([4]) per ogni $\tilde{\varphi} \in H_0^{1,2}(\tilde{\Omega})$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \ \sum_{h,k=1}^{n} \int_\Omega \tilde{a}_{ij}(y)\, D_h \tilde{u}(y)\, \tilde{\Phi}_{hi}(y)\, D_k \tilde{\varphi}(y)\, \tilde{\Phi}_{kj}(y)\ \ dy \ = \ \int_\Omega \tilde{f(y)}\, \tilde{\varphi}(y)\ \ dy, \tag{95}$$

Poniamo

$$A_{hk} \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}(y)\, \tilde{\Phi}_{hi}(y)\, \tilde{\Phi}_{kj}(y), \tag{96}$$

e sostituiamo in (94) ottenendo per ogni $\tilde{\varphi} \in H_0^{1,2}(\tilde{\Omega})$

$$\sum_{h,k=1}^{n} \int_{\tilde{\Omega}} A_{hk}(y)\, D_h \tilde{u}(y)\, D_k \tilde{\varphi}(y)\ \ dy \ = \ \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f(y)}\, \tilde{\varphi}(y)\ \ dy, \tag{97}$$

Per poter applicare i risultati del paragrafo precedente dobbiamo verificare che la matrice dei coefficienti $\{A_{hk}\}_{hk=1,\cdots,n}$ è uniformemente ellittica su $\tilde{\Omega}$. Infatti, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{h,k=1}^{n} A_{hk}(y)\, \xi_h\, \xi_k \ = \ \sum_{h,k=1}^{n} \ \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \tilde{\Phi}_{hi}(y)\, \tilde{\Phi}_{kj}(y)\, \xi_h\, \xi_k \ = \\
&, \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\Phi}_{hi}(y)\, \xi_h \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{\Phi}_{kj}(y) \xi_k \right) \geq \\
&\text{(per l'ellitticità di } \{\tilde{a}\}_{ij}) \\
&\geq \nu \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \tilde{\Phi}_{hi} \xi_h \right)^2 \ \geq \ c\, \nu \|\xi\|^2, \ \ c > 0.
\end{aligned} \tag{98}$$

Infatti la funzione

$$T(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \tilde{\Phi}_{hi}\, \xi_h \right)^2$$

ammette minimo sulla palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Questo minimo è necessariamente positivo per il fatto che $\tilde{\Phi}$ è un isomorfismo.

[4]Si pone $\tilde{a}(y) = a(\Phi^{-1}(y))$, $\tilde{f}(y) = f(\Phi^{-1}(y))$, $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(\Phi^{-1}(y))$, $\tilde{\Phi}_{hi}(y) = \dfrac{\partial \Phi_h(\Phi^{-1}(y))}{\partial x_i}$, $\tilde{\Omega} = \Phi(U_i \cap \Omega)$.

Possiamo quindi considerare una semipalla B_r^+ contenuta in $\tilde{\Omega}$ dove applicare i teoremi di regolarità dimostrati nel paragrafo precedente. e quindi si ha che $\tilde{u} \in H^2(B_\rho^+)$, per $\rho \in (0,r)$. Prendendo il ricoprimento introdotto all'inizio con $U_i = \Phi^{-1}(B_r^+)$ e $V_i = \Phi^{-1}B_\rho^+$ otteniamo che $u \in H^2(V_i)$.

□

Teorema 10.2. *Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1, $f \in L^2(\Omega)$, la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ uniformemente ellittica su Ω con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, appartenenti a $C^0(\overline{\Omega})$. Allora la soluzione debole $u \in H^{1,2}(\Omega)$, del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] + \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, D_i u(x) + a_0\, u(x) = f(x), \ \ x \in \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{99}$$

appartiene a $H^{2,2}(\Omega)$ e vale la maggiorazione

$$\|u\|_{2,2,\Omega} \le c(a_{ij}, a_i, n, \Omega)\ \{\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}\}\,. \tag{100}$$

Dimostrazione. Basta osservare che l'equazione (90) può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] = -\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, D_i u(x) - a_0\, u(x) + f(x), \ \ x \in \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{101}$$

ed applicare il Teorema 10.1 osservando che il secondo membro dell'equazione (101) appartiene a $L^2(\Omega)$. □

Corollario 10.3. *Nelle ipotesi del teorema precedente per la soluzione debole del Problema di Dirichlet 90 vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,2,\Omega} \le c(a_{ij}, a_i, n, \Omega)\ \|f\|_{0,\Omega}. \tag{102}$$

Dimostrazione. Segue dalla diseguaglianza (100) e dalla (27) con $g = 0$. □

11 Sull'esistenza globale di soluzione per l'equazione completa

Consideriamo il Problema di Dirichlet 90. Nel paragrafo 5 abbiamo dimostrato che se f appartiene a $H^{-1}(\Omega)$ il problema ammette una ed una sola soluzione in $H_0^1(\Omega)$ purché il diametro di Ω sia sufficientemente piccolo. Utilizzando le maggiorazioni a priori stabilite nel paragrafo precedente e ponendo delle ipotesi più forti sui dati si dimostra che il problema *può avere* soluzione anche se il dominio non ha diametro piccolo. Il seguente risultato è un primo passo in questa direzione. Indichiamo con

$$\begin{aligned} &Au = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j[a_{ij}(x)\, D_j u(x)] + \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, D_i u(x) + a_0\, u(x), \\ &\mathcal{P}u = Au. \end{aligned} \tag{103}$$

Teorema 11.1. *Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1, $f \in L^2(\Omega)$, la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ uniformemente ellittica su Ω con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora l'applicazione lineare $\mathcal{P}$ che ad ogni $u \in H^{2,2} \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ associa la sua immagine $\mathcal{P}u$ appartenente a $L^2(\Omega)$ ha nucleo di dimensione finita e immagine chiusa.*

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma di Peetre.

Lemma 11.2. *Siano E, F, G tre spazi di Banach riflessivi, tali che $E \subset F$ con immersione compatta e sia $\mathcal{C}$ un operatore lineare e continuo di E in G. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(I) l'immagine di $\mathcal{C}$ in G è chiusa ed il nucleo di $\mathcal{C}$ ha dimensione finita

(II) esiste una costante positiva c tale che per ogni $u \in E$ sia verificata

$$\|u\|_E \leq c\{\|\mathcal{C}u\|_G + \|u\|_F\}. \tag{104}$$

Dimostrazione. (del Teorema)
La tesi segue dal Lemma di Peetre ponendo

$$\begin{aligned} E &= H^{2,2} \cap H_0^{1,2}(\Omega) \\ F &= H_0^{1,2}(\Omega) \\ G &= L^2(\Omega) \\ \mathcal{C}u &= \mathcal{P}u, \end{aligned} \tag{105}$$

osservando che:

(1) l'immersione di $H^{2,2}(\Omega)$ in $\cap H^{1,2}(\Omega)$ è compatta per il Teorema di Rellich.

(2) la maggiorazione (104) segue dalla (100).

□

Dimostrazione. (del Lemma di Peetre)
(1) Proviamo che la condizione (II) implica la (I).
Poniamo $E_0 = ker\,\mathcal{C}$. Si ha che la palla unitaria in E_0 è compatta in F dunque, per (104) è compatta anche in E, quindi E_0 è di dimensione finita.([5])
Scomponiamo E nella somma diretta $E = E_0 \oplus E_1$. La restrizione di $\mathcal{C}$ a E_1 è inettiva e quindi si puó dimostrare che per ogni $u \in E_1$ vale

$$\|u\|_E \leq C\,\|\mathcal{C}u\|_G. \tag{106}$$

Infatti se per assurdo non fosse vera esisterebbe una successone C_n tendente ad infinito ed una successione u_n in E_1 tali che

$$\|u_n\|_E > C_n\,\|\mathcal{C}u_n\|_G. \tag{107}$$

Ovvero, posto $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$,

$$\frac{1}{C_n} > \|\mathcal{C}v_n\|_G. \tag{108}$$

Dato che la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in E, dato che ha norma uguale a uno, possiamo estrarre una sottosuccessione (che indicheremo ancora con $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), che in F converge a v. Per (104) e (108) $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in E_1 e quindi converge necessariamente a v. Ma per (108) deve essere $v = 0$ (v_n appartiene a E_1). Questo è in contraddizione con quanto si ottiene passando al limite nella (104), ossia

$$1 \leq c\{\|\mathcal{C}v_n\|_G + \|v_n\|_F\}. \tag{109}$$

[5] Uno spazio di Banach nel quale ogni sottoinsieme limitato sia relativamente sequenzialmente compatto è necessariamente di dimensione finita. Per la dimostrazione si veda ad esempio [8], vol I.

Per dimostrare che $Im\mathcal{C}$ è chiuso in G, prendiamo una succesione $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a w in G. Allora esiste u_n in E tale che $\mathcal{C}u_n = w_n$. Posto $u_n = v_n + z_n$, con $v_n \in E_0$ e $z_n \in E_1$, risulta $T(z_n) = T(u_n) = w_n$. Possiamo scrivere per (104)

$$\|z_n\|_E \;\leq\; c\,\{\|\mathcal{C}z_n\|_G \;+\; \|z_n\|_F\}. \tag{110}$$

Se $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in E possiamo estrarre una successione convergente in F a z, che per (110) è di Cauchy in E, e quindi converge a z anche in E. Per la continuità di $\mathcal{C}$ si ha che $\mathcal{C}z = w$. Ciò prova che $\mathcal{C}(E)$ è chiuso. Resta da far vedere che $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in E. Se così non fosse esisterebbe una sottosuccessione $\{z_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_{h_n}\|_E = +\infty$. Posto

$$v_{h_n} = \frac{z_{h_n}}{\|z_{h_n}\|_E},$$

si ha

$$\|v_{h_n}\|_E = 1, \quad T(v_{h_n}) = \frac{T(z_{h_n})}{\|z_{h_n}\|}.$$

Da cui si otterrebbe l'esistenza di una sottosuccessione $\{v_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (si deduce che è di Cauchy in E da (104))

$$\lim_{n\to+\infty} v_{k_n} \;=\; v, \;\; \|v_{k_n}\|_E = 1, \;\; \lim_{n\to+\infty} \|z_{k_n}\| \;=\; +\infty$$

Ma poiché $T(z_n)$ tende a w la successione $\{T(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Allora $T(v_{h_n})$ tende 0 e quindi $T(v) = 0$, ossia $v \in E_0 \cap E_1$, cioè $v = 0$. Assurdo perché $\|v\|_E = 1$.

(2) Proviamo che la condizione (I) implica la (II). Consideriamo la scomposizione dello spazio E vista in precedenza, ossia $E = E_0 \oplus E_1$.
La restrizione di C a E_1 è una applicazione chiusa e quindi per il Teorema del grafico chiuso possiamo scrivere per ogni $v \in E_1$

$$\|v\|_E \leq C_1 \|\mathcal{C}v\|_G. \tag{111}$$

Si dimostra poi che per ogni $w \in E_0$ vale([6])

$$\|w\|_E \leq C_2 \|w\|_F. \tag{112}$$

Per ogni $u \in E$ si ottiene (104) da (111), (112), in quanto $u = v + w$, con $v \in E_1$, $w \in E_0$ e $\mathcal{C}u = \mathcal{C}v$.

□

12 Teoria degli operatori vicini ed equazioni non variazionali: breve storia.

L'idea di introdurre il concetto di *vicinanza tra operatori* trova la sua origine nel problema di dimostrare l'esistenza ed unicità di soluzioni di problemi non variazionali del tipo seguente.

$$\begin{cases} u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \\[2ex] \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \;=\; f(x), \text{ in } \Omega. \end{cases} \tag{113}$$

[6] Per assurdo. Se esistessero due successioni $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$tali che

$$\lim_{n\to+\infty} C_n \;=\; +\infty, \quad \|w_n\|_E \geq C_n\,\|w_n\|_F$$

si avrebbe che, ponendo $y_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_E}$,

$$\frac{1}{C_n} \geq \|y_n\|_F$$

Quindi y_n tende a zero in F. Ma la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, appartenendo allo spazio E_0 di dimensione finita ammette una successione convergente a y che ha norma 1 in E. Assurdo.

dove: $f \in L^2(\Omega)$, , Ω è un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$, che per semplicità supporremo, in questa parte, convesso, mentre $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e la matrice $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ è uniformemente ellittica su Ω e simmetrica.([7])
Se $n > 2$, il Problema (113) non è ben posto in generale sotto le sole ipotesi di ellitticità uniforme sulla matrice dei coefficienti (vedi esempio alla fine del paragrafo), ovvero esiste $\nu > 0$ tale che
Sono dunque necessarie delle ipotesi più restrittive sui coefficienti per provare l'esistenza ed unicità delle soluzioni del Problema (113). Ovvero ipotesi di maggiore regolarità dei coefficienti, ad esempio $a_{ij} \in C^0(\Omega)$, oppure di tipo algebrico sulla matrice come ad esempio la **Condizione di Cordes** e la **Condizione** A_x.

Condizione 1. *(Condizione di Cordes)*
Sia $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1,\cdots,n}$ una matrice tale che $\|A(x)\|_{\mathbb{R}^{n^2}} \neq 0$, q.o.. in Ω. Diciamo che $A(x)$ soddisfa la Condizione di Cordes se esite $\varepsilon \in (0,1)$ tale che

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x)\right)^2}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x)} \geq n - 1 + \varepsilon, \quad \text{a.e. in } \quad \Omega. \tag{114}$$

Condizione 2. *(Condizione A_x) ([8])*
Esistono tre costanti reali σ, γ, δ ed una funzione $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, con $\sigma > 0$, $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma + \delta < 1$, $a(x) \geq \sigma > 0$, tale che

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_{ii} - a(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_{ij} \right| \leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^n \xi_{ij}^2 \right)^{1/2} + \delta \left| \sum_{i=1}^n \xi_{ii} \right|, \tag{117}$$

$\forall \xi = \{\xi_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, a.e. in Ω.

Si dimostra che queste due condizioni sono equivalenti,
Vediamo l'idea che ha portato alla formulazione della *Condizione A* per risolvere il Problema 113.
Consideriamo

$$\Delta u = \alpha f + \Delta w - \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} w(x) \tag{118}$$

e definiamo un'applicazione $\mathcal{T} : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ che associa ad ogni $w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ la soluzione $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ dell'equazione (118).

[7]Questa non è un'ipotesi restrittiva, in quanto possiamo scrivere:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ij}}{2} + \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} = a_{ij}^+ + a^- ij,$$

a_{ij}^+ sono i coefficienti di una matrice simmetrica, mentre a_{ij}^- sono i coefficienti di una matrice antisimmetrica. Risulta

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^- D_{ij} u = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} D_{ij} u - \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ji}}{2} D_{ij} u = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} D_{ij} u - \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ji}}{2} D_{ji} u = 0.$$

[8]La condizione *Condizione A_x* implica l'uniforme ellitticità su Ω. Infatti in (117) prendiamo la matrice $\xi = \{\xi_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ del tipo $\xi = \{\eta_i\, \eta_j\}_{i,j=1,\cdots,n}$. Sostituendosi ha

$$\left| \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - a(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \right| \leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^n \eta_i^2 \eta_j^2 \right)^{1/2} + \delta \sum_{i=1}^n \eta_i^2 = (\gamma + \delta) \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \tag{115}$$

Da cui segue

$$[1 - (\gamma + \delta)] \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq a(x) \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\, \eta_i\, \eta_j \Longrightarrow \frac{1 - (\gamma + \delta)}{\mu} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j. \tag{116}$$

Dove $\mu = \sup_\Omega a(x)$.

Si può provare che $\mathcal{T}$ è una contrazione dello spazio $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ in sè se $A(x)$ verifica la *Condizione* A_x. Infatti:[9]

$$\|\mathcal{T}(w_1) - \mathcal{T}(w_2)\|^2_{H^{2,2}(\Omega)} \leq \int_\Omega |\Delta\, u_1 - \Delta\, u_2|^2\, dx =$$

$$= \int_\Omega |\Delta w_1 - \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} w_1(x) - [\Delta w_2 - \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} w_2(x)\ ]|^2\, dx =$$

$$= \int_\Omega |\Delta w_1 - \Delta w_2 - \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij}[w_1(x) - w_2(x)]|^2\, dx \leq$$

$$(\text{per la } \mathit{Condizione}\ A)$$

$$\leq \left[\gamma \|w_1 - w_2\|_{H^{2,2}(\Omega)} + \delta\, |\Delta(w_1 - w_2)|\right]^2 \leq$$

$$(\text{per la maggiorazione di Miranda} - \text{Talenti})$$

$$\leq (\gamma + \delta)^2\ \|w_1 - w_2\|^2_{H^{2,2}(\Omega)}$$

Da questa si deduce che $\mathcal{T}$ è una contrazione e quindi si ottiene il risultato desiderato. Le dimostrazione del Teorema 6.2 ripercorre in sostanza questa strada, la cui astrazione si fa nel modo che segue:

$$\begin{aligned} Bu &= \Delta u \\ Au &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} u(x) \\ \mathcal{X} &= H^2 \cap H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{B} &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Ovvero si può dedurre che l'operatore $u \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} u(x)$ è una bigezione tra $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$ come conseguenza dei seguenti fatti:

1. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} u(x)$ è in una certa relazione algebrica con Δ
2. Δu è un *bigezione* tra $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$.

Le precedenti osservazioni sono sostanzialmente il metodo di appplicazione della *teoria degli operatori vicini*: in pratica dalla *Condizione* A_x abbiamo ottenuto che A è *vicino* a B , mentre dal Teorema 6.2, poichè B è una *bigezione* tra gli spazi considerati anche A è una *bigezione* tra di essi.

Vediamo ora il seguente controesempio
Sia $\Omega = S(0, r)$. Consideriamo l'equazione

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, D_{ij} u(x) = 0, \tag{119}$$

[9] Si tenga presente la seguente maggiorazione Miranda-Talenti: se Ω è convesso, allora per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ risulta

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

dove

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} + b\frac{x_i\, x_j}{\|x\|^2}, \ \ b = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda}, \ \ \lambda < 1, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{120}$$

La matrice è uniformemente ellittica su Ω :

$$\sum_{ij=1}^{n} \left(\delta_{ij} + b\frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \right) \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \ \xi_i^2 \ + \sum_{i,j=1}^{n} \ b\frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2} =$$

$$= \|\xi\|^2 \left(1 + b \sum_{ij=1}^{n} \ \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2 \, \|\xi\|^2} \right) > c\|\xi\|^2, \ \ (c > 0)$$

perchè $b > -1$ e

$$\sum_{ij=1}^{n} \ \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2 \, \|\xi\|^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \ x_i \xi_i\right)^2}{\|x\|^2 \|\xi\|^2} \le 1.$$

La funzione

$$u(x) = \|x\|^{\lambda} \tag{121}$$

È una soluzione di (119), perché:

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= \lambda \, \|x\|^{\lambda-2} \, x_i \\ D_{ij} u(x) &= \lambda \, \|x\|^{\lambda-4} \, [(\lambda - 2) x_i \, x_j + \delta_{ij} \, \|x\|^2]. \end{aligned}$$

Inoltre

$$D_i u \in L^q(S(0, r)) \quad \text{if} \quad q < \frac{n}{1-\lambda}$$

mentre

$$D_{ij} u \in L^p(S(0, r)) \quad \text{if} \quad p < \frac{n}{2-\lambda}.$$

Se $\lambda \longrightarrow 1^-$ allora $p \longrightarrow n$ e $q \longrightarrow +\infty$. Così che per valori di λ vicini ad 1 abbiamo che $u \in H^{2,2}(\Omega)$, purché $n > 2$.
Ricordiamo anche che la funzione $v(x) = r^{\lambda}$ è una soluzione di (119). Il problema non ha quindi unicità di soluzione.

Vediamo ora come si prova l'esistenza ed unicità di soluzione del Problema 113 nel caso di dimensione $n = 2$. Il primo passo consiste nel provare che nel caso bidimensionale l'uniforme ellitticità e la *Condizione* A_x sono equivalenti. Che la *Condizone* A_x implichi l'uniforme ellitticità è gia stato osservato in precedenza. Verifichiamo che ogni matrice $A(x)$ uniformemente ellittica su Ω verifica (2). Poichè $A(x)$ è simmetrica, possiamo determinare gli autovalori reali $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ e considerare la matrice

$$\Gamma(x) \ = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}.$$

Per l'ipotesi di ellitticità risulta inoltre che esite $\nu > 0$ tale che, per q.o. $x \in \Omega$, $\lambda_1(x) \ge \nu$, $\lambda_2(x) \ge \nu$.
Osserviamo che le matrici $I \, - \, a(x)\Gamma(x)$ e $I \, - \, a(x)A(x)$ hanno gli stessi autovalori e quindi le loro norme sono uguali:

$$\|I \, - \, a(x)\Gamma(x)\|_{\mathbb{R}^4} \ = \ \|I \, - \, a(x)A(x)\|_{\mathbb{R}^4} \ = \ \|(1, 1) \, - \, a(x)(\lambda_1(x), \lambda_2(x))\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Si tratta quindi di provare che esite una funzione $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $a(x) \ge \sigma > 0$ q.o. in Ω tale che per ogni matrice ξ, 2×2, si abbia

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{2} \xi_{ii} - a(x) \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \xi_{ij} \right| = (I \, - \, a(x)A(x)|\xi) \ \le \\ &\le \ \|I \, - \, a(x)A(x)\|_{\mathbb{R}^4} \|\xi\|_{\mathbb{R}^4} = \|(1, 1) \, - \, a(x)(\lambda_1(x), \lambda_2(x))\|_{\mathbb{R}^2} \|\xi\|_{\mathbb{R}^4} \le \rho \|\xi\|_{\mathbb{R}^4}, \end{aligned} \tag{122}$$

con $\rho \in (0,1)$. Ovvero

$$\|(1,1) - a(x)(\lambda_1(x), \lambda_2(x))\|_{\mathbb{R}^2} \le \rho \iff a^2(x)[\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)] - 2\,a(x)[\lambda_1(x) + \lambda_2(x)] + 2 - \rho^2 \le 0.$$

Che ammette una soluzione reale $a(x)$ se e solo se

$$[\lambda_1(x) + \lambda_2(x)]^2 - [\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)](2-\rho^2) \ge 0 \iff \frac{2\lambda_1(x)\,\lambda_2(x)}{\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)} \ge 1 - \rho^2.$$

Da cui posto, $M = \max_{i,j=1,2} \sup_{\Omega} a_{ij}(x)$, deduciamo

$$\frac{2\lambda_1(x)\,\lambda_2(x)}{\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)} \ge \frac{\nu^2}{M^2}.$$

Si ha la tesi scegliendo

$$\left[1 - \left(\frac{\nu}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \rho < 1 \text{ e } a(x) = \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)}.$$

13 Esistenza di soluzione per il problema non variazionale con coefficienti regolari

.

In questa parte illustriamo il metodo di N. S. Bernstein con il quale si dimostra l'esistenza di soluzione per il problema di Cauchy relativo ad un'equazione non variazionale con coefficienti regolari.
Questo metodo parte da maggiorazioni a priori (ossia maggiorazioni che riguardano soluzioni delle quali non si conosce ancora l'esistenza) e arriva a rpovare l'esistenza delle medesime. Il primo passo di questa tecnica è il seguente principio di massimo.

Teorema 13.1. *(Principio di Massimo o di minimo)*
Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una sottosoluzione (soprasoluzione) dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \ge 0, \ (\le 0) \ \textit{in } \Omega, \tag{123}$$

dove $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ e la matrice $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1,\cdots,n}$ è uniformemente ellittica su Ω. Allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad (\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u). \tag{124}$$

Dimostrazione. Supponiamo come primo passo che in (123) si abbia

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) > 0, \ (< 0) \text{ in } \Omega, \tag{125}$$

Se x_0 fosse un punto di massimo relativo (minimo relativo) interno ad Ω la matrice hessiana $H(x_0) = \{D_{ij}u(x_0)\}_{i,j=1,\cdots,n}$ sarebbe semidefinita negativa (positiva). D'altra parte $A(x_0)$ è definita positiva (negativa) e dunque ([10])

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, D_{ij}u(x_0) \le 0, \ (\ge 0) \text{ in } \Omega, \tag{126}$$

[10]Infatti se poniamo $A = A(x_0)$, $H = H(x_0)$ e consideriamo le matrici unitarie U, V che riducono rispettivamente A, H in

Ma questo contraddice (125). Supponiamo ora che in (123) valga "$\geq$" ("$\leq$"). Consideriamo per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$u_\varepsilon(x) \,=\, u(x) \,+\, \varepsilon\,\|x\|^2 \qquad (u_\varepsilon(x) \,=\, u(x) \,-\, \varepsilon\,\|x\|^2),$$

che soddisfa (125) e quindi risulta

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \,=\, \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon, \quad (\min_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \,=\, \min_{\partial\Omega} u_\varepsilon). \tag{127}$$

Passando al limite per ε che tende a zero si ha la tesi. □

Corollario 13.2. *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è soluzione dell'equazione omogenea*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \,=\, 0, \;\; \textit{in } \Omega, \tag{128}$$

allora u assume su $\partial\Omega$ sia il valore massimo che il valore minimo.

Come conseguenza di questo fatto otteniamo il seguente risultato

Teorema 13.3. *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è soluzione del Problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \,=\, f(x), \;\; \textit{in } \Omega, \\ \\ u(x) = g(x), \;\; \textit{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{129}$$

allora è unica.

Dimostrazione. Per asurdo, se u_1 e u_2 allora $v = u_1 - u_2$ risolverebbe il Problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}v(x) \,=\, 0, \;\; \text{in } \Omega, \\ \\ v(x) = 0, \;\; \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{130}$$

da cui per il Corollario 13.2 $v = 0$ e dunque $v_1 = v_2$. □

Il passo successivo nella dimostrazione dell'esistenza di soluzioni per il Problema di Dirichlet è la seguente maggiorazione a priori

Teorema 13.4. *Se $\partial\Omega$ è di classe C^3 e $u \in H^{2,2} \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ è soluzione del Problema di Dirichlet 129, con $g = 0$, dove $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, allora $D_{ij}u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e si ha*

$$\sum_{ij=1}^{n} \|D_{ij}u\|^2_{C^{0\alpha}(\overline{\Omega})} \,\leq\, c\, \left(\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \,+\, \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij}u\|^2_{0,\Omega} \right). \tag{131}$$

forma diagonale, cioè $U^*AU = \Lambda_A$, $V^*HV = \Lambda_H$, dove $\Lambda_A = \{\alpha_i\, \delta_{ij}\}_{i=1,\cdots,n}$, $\Lambda_H = \{\beta_i\, \delta_{ij}\}_{i=1,\cdots,n}$, possiamo scrivere

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_{)})\, D_{ij}u(x_0) \,=\, (A|H) = (UU^*AUU^*|VV^*HVV^*) =$$

$$= (U\Lambda_A U^*|V\Lambda_H V^*) \,=\, (\Lambda_A U^*V|U^*V\Lambda_B) = (\Lambda_A Q|Q\Lambda_H) =$$

$$(\text{dove } U^*V = Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}\ ),$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_{ij} q_{ij} \beta_j \,=\, \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_{ij}^2\, \alpha_i\, \beta_j \,\leq 0.$$

Conseguenza di questo teorema è il seguente.

Teorema 13.5. *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ di classe C^3, se f appartiene a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ allora esiste una costante positiva c che dipende da Ω, dalla costante di ellitticità dei coefficienti a_{ij}, dalla norma di essi in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, tale che se u è una soluzione $H^{2,2}(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \;=\; f(x), \;\; \textit{in } \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \;\; \textit{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{132}$$

allora vale la maggiorazione

$$\sum_{ij=1}^{n} \|D_{ij}u\|^2_{2,2,\Omega} \;\leq\; c\, \left(\|f\|^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \right). \tag{133}$$

Dimostrazione. Se la tesi fosse falsa esisterebbero

(1) una successione di coefficienti $a^{(k)}_{ij}(x)$ verificanti

(1a) per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{(k)}_{ij}(x)\xi_i\,\xi_j \;\geq\; \nu\,\|\xi\|^2_n$,

(1b) esite $M > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ valga $\|a^{(k)}_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \;\leq\; M$

(2) una successione di funzioni in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ tali che

$$\|f_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{134}$$

(3) una successione di soluzioni del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{(k)}_{ij}(x)\, D_{ij}u_k(x) \;=\; f_k(x), \;\; \text{in } \Omega, \\ \\ u_k(x) = 0, \;\; \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{135}$$

con

$$\|u_k\|_{2,2,\Omega} = 1. \tag{136}$$

Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione estratta da $a^{(k)}_{ij}$ che converge a a_{ij} unifomemente in $\overline{\Omega}$, inoltre $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ verifica (1a) e (1b). Dalla maggiorazione a priori (129) ricaviamo per k sufficientemente grande

$$\sum_{ij=1}^{n} \|D_{ij}u_k\|^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \;\leq\; c\, \left(\|f_k\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \;+\; \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij}u_k\|^2_{0,\Omega} \right) \leq c_1, \tag{137}$$

perché per (134) risulta $\|f_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mentre per il punto (3) si ha $\|u_k\|_{2,2,\Omega} = 1$. Da questo deduciamo che essendo $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ equilimitata in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ possimo estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente ad u in $C^2(\overline{\Omega})$ (per Ascoli-Arzelà), il che implica la convergenza forte in $H^{2,2}(\Omega)$ ad u. Passando al limite in (135) si ottiene che u è soluzione del problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) \;=\; 0, \;\; \text{in } \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \;\; \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{138}$$

Per il principio di massimo si ha che $u = 0$ su Ω, ma questo è in contraddizione con $\|u\|_{2,2,\Omega} = 1$. $\square$

Da questi due teoremi deduciamo il seguente corollario

Corollario 13.6. *Nelle ipotesi dei teoremi precedenti per la soluzione u del Problema di Dirichlet (13.3) vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\,\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \tag{139}$$

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema

Teorema 13.7. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^3 e siano $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ per i quali esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, per ogni $x \in \Omega$ si abbia*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \nu\|\xi\|_n^2, \tag{140}$$

allora per ogni f appartente a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,D_{ij}u(x) = f(x), \text{ in } \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \text{ su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{141}$$

ammette una ed una soluzione appartenente a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e per essa vale la maggiorazione

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\,\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \tag{142}$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema utilizziamo il Metodo di continuità considerando la famiglia di operatori $A_t(u)$ così definita

$$A_t u = (1-t)\nu\Delta u + t\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,D_{ij}u, \quad t \in [0,1]. \tag{143}$$

I coefficienti di ciascun operatore A_t, ovvero $a_{ij}^{(t)}(x) = (1-t)\nu\delta_{ij} + t\,a_{ij}(x)$ verifica (140). Come conseguenza del Corollario 13.6 si ha che per ogni $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ vale([11])

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\,\|A_t u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}, \tag{144}$$

dove la costante non dipende da t. Verifichiamo quindi le ipotesi del Teorema 6.8 considerando come spazi $\mathcal{X} = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\mathcal{B} = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. L'ipotesi (41) è verificata per $t = 0$ perché l'operatore Δ è un isomorfismo tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$. Per la verifica di (42) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\|A_t u - A_s u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = |t-s|\left\|\nu\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,D_{ij}u\right\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \\ &\leq c\,|t-s|\,\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ &\text{(per il Corollario 13.6)} \\ &\leq c_1\,c\,|t-s|\,\|A_t u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \tag{145}$$

□

[11] Infatti posto $A_t u = f_t$ possiamo applicare il corollario al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} (1-t)\nu\Delta u + t\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,D_{ij}u = f_t(x), \text{ in } \Omega, \\ \\ u(x) = 0, \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$

14 Commento bibliografico

I testi che trattano la problematica relativa alle equazioni ellittiche sono numerosi. Mi limito a segnalare quelli che a mio giudizio sono i più utili per un primo approccio all'argomento. Alcuni degli argomenti esposti li ho tratti dai libri di Giusti [3] e di Michajlov [7]. Ovviamente non si può omettere di citare il anche il testo della Ladyzhenskaya [5]. Per le equazioni non variazionali un testo abbastanza completo è il classico Gilbarg-Trudinger [4] (nell'edizione più recente del 1998). È interessante anche il testo di Maugeri-Plagachev-Softova [9]. Per un primo approfondimento relativo alle equazioni e/o ai sistemi di ordine superiore si possono vedere i libri di Campanato [1], di Miranda [8], vol II, Giaquinta-Martinazzi [2], o il classico Lions-Magenes [6]. Infine non si può non citare come testo di base, non solo per le equazioni ellittiche ma per tutte le equazioni alle derivate parziali il monumentale libro di Salsa [10]

Riferimenti bibliografici

[1] Campanato, Sergio Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarit all'interno. Quaderni. Scuola Normale Superiore Pisa, Pisa, 1980. 187 pp.

[2] Giaquinta, Mariano; Martinazzi, Luca, An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie), 2. Edizioni della Normale, Pisa, 2005. xii+302 pp.

[3] Giusti, Enrico, Equazioni ellittiche del secondo ordine. Pitagora Editrice, Bologna, 1978

[4] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xiv+517 pp.

[5] Ladyzhenskaya, O. A. The boundary value problems of mathematical physics. Applied Mathematical Sciences, 49. Springer-Verlag, New York, 1985. xxx+322 pp

[6] Lions, J.-L.; Magenes, E. Problmes aux limites non homognes et applications. Vol. 1. Travaux et Recherches Mathmatiques, No. 20. Dunod, Paris, 1970.

[7] Michajlov, Valentin, Equazioni differenziali alle derivate parziali, Mir, Mosca, 1984, 404 p.p.

[8] Miranda, Carlo, Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare: Volume I e II , Unione Matematica Italiana, 1978.

[9] Maugeri, Antonino; Palagachev, Dian K.; Softova, Lubomira G. Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients. Mathematical Research, 109. Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2000. 256 pp.

[10] Salsa, Sandro, Equazioni a derivate parziali : metodi, modelli e applicazioni, 2. ed. Springer Italia, Milano 2010. 614 pp.