Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 9 - 7/5/2014

1 Calcolo di integrali mediante il metodo dei trapezi

Ci poniamo il problema di calcolare il valore dell'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove $f(x) : R \to R$ è continua nell'intervallo $[a, b]$.

Il metodo dei trapezi consiste nel suddividere l'intevallo $[a, b]$ in N sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, con $t_i = a+(i-1)h$, $i = 1, \ldots, N+1$, di ampiezza $h = (b-a)/N$ e nell'approssimare l'integrale in ciascun sottointervallo come l'area del trapezio di altezza $t_{i+1}-t_i = h$, e le cui basi sono il segmento di estremi $(t_i, 0)$, $(t_i, f(t_i))$ e il segmento di estremi $(t_{i+1}, 0)$, $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$. La formula di approssimazione che ne deriva è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh)\right), \tag{1}$$

dove $h = (b-a)/N$.

Esercizio 1. Si scriva una function `S=trapezi(f, a, b, N)` che approssima l'integrale con la formula (1), predendo in input la funzione `f`, gli estremi di integrazione `a,b`, il numero dei sottointervalli `N`, e dando in output l'approssimazione `S` dell'integrale. *Attenzione:* per valutare la funzione `f` in un punto, all'interno della function `trapezi` occorre usare l'istruzione `feval`; ad esempio per calcolare $f(a)$ si deve dare il comando `feval(f,a)`.

Per verificare la correttezza dell'implementazione calcoliamo

$$\int_0^1 e^x dx$$

mediante la function `trapezi`:

```
octave:4> format long e
octave:8> S=trapezi(@exp,0,1,100)
S =  1.71829614745042e+00
octave:9> S-(exp(1)-exp(0))
```

```
ans =   1.43189913719421e-05
octave:6> S=trapezi(@exp,0,1,1000)
S =   1.71828197164920e+00
octave:7> S-(exp(1)-exp(0))
ans =   1.43190151069561e-07
octave:10> S=trapezi(@exp,0,1,10000)
S =   1.71828182989095e+00
octave:11> S-(exp(1)-exp(0))
ans =   1.43190215240452e-09
```

Si osserva che l'accuratezza del risultato cresce con il numero N delle suddivisioni. Possiamo verificare sperimentalmente che l'errore converge a zero come h^2 scrivendo il seguente script:

```
# Visualizza la decrescita errore nel metodo dei Trapezi
  for k=1:15;
    err(k) = abs(exp(1)-1-trapezi(@exp,0,1,2^k));
  end
  loglog(1./2.^[1:15],err,'x-');
  title('Metodo dei trapezi, f(x) = exp(x)');
  xlabel('Ampiezza h dei sottointervalli');
  ylabel('Errore');
```

Esercizio 2. Si calcoli mediante la function `trapezi` l'integrale

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2+0.04} - 6 \right) dx$$

scegliendo N opportunamente grande, in modo che il valore approssmato dell'integrale non cambi nelle prime 5 cifre significative.

2 Calcolo di integrali mediante il metodo di Simpson

Un'alternativa al metodo dei trapezi è il metodo di Simspon composito, che consiste ancora nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, con $t_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \dots, N+1$, di ampiezza $h = (b-a)/N$, dove N è pari. In ciascun sottointervallo l'integrale viene approssimato mediante l'integrale di un opportuno polinomio di grado 2 (per maggiori dettagli si cerchi su Wikipedia "Simpson's rule"). La formula di approssimazione risultante è:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f(a+2jh) + 4 \sum_{j=1}^{N/2} f(a+(2j-1)h) \right), \tag{2}$$

dove $h = (b-a)/N$.

Esercizio 3. Si scriva una function `S=simpson(f, a, b, N)` che approssima l'integrale con la formula (2).

Per verificare la correttezza dell'implementazione calcoliamo come prima

$$\int_0^1 e^x dx$$

```
octave:25> S=simpson(@exp,0,1,100)
S =   1.71828182855450e+00
octave:26> S-(exp(1)-exp(0))
ans =   9.54585299695054e-11
octave:27> S=simpson(@exp,0,1,1000)
S =   1.71828182845906e+00
octave:28> S-(exp(1)-exp(0))
ans =   1.08801856413265e-14
```

Si osserva che il metodo di Simpson, a parità di N, è più accurato del metodo dei trapezi.

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale dell'Esercizio 2 con il metodo di Simpson. Quale valore di N si deve scegliere per ottenere la stessa accuratezza del metodo dei trapezi?

3 Calcolo di integrali mediante la function `quad`

La funzione `quad` di Octave permette di approssimare l'integrale di funzioni $f : R \to R$. L'uso più elementare consiste nel definire una function `y=f(x)` che rappresenta la funzione integranda, e nel dare l'istruzione `y=quad (@f, a, b)`, dove `a` e `b` sono gli estremi dell'intervallo d'integrazione: `a` e `b` possono essere reali, oppure infinito (`Inf`) o meno infinito (`-Inf`).

Esercizio 5. Utilizzando la funzione `quad`, si calcoli

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Si calcoli l'errore dell'approssimazione, sapendo che il valore esatto è $\pi^{1/2}/2$.

Esercizio 6. [Integrale di Fresnel] Consideriamo le funzioni

$$x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du, y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du.$$

Si disegni il grafico della curva $(x(t), y(t))$, con $t \in [-4\pi, 4\pi]$, calcolando l'integrale con la funzione `quad`.

Esercizio 7. Si usino le function `trapezi`, `simpson` e `quad` per calcolare il valore di π approssimando l'integrale

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx$$

Quale valore di N occorre per avere per avere le prime 6 cifre esatte con `trapezi` e `simpson`? Qual è l'errore dell'approssimazione ottenuta con `quad`?

4 Esercizi da inviare al docente

Inviare per e-mail, con subject "LDMC: lezione 9, [cognome nome]":

1. La figura ottenuta nell'Esercizio 6
2. Le functions `trapezi` e `simpson`.
3. Il valore di N ottenuto all'Esercizio 7, applicando `trapezi` e `simpson`.