Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 5 - 2/4/2014

1 La funzione `meshgrid` e grafici in $\mathbb{R}^3$

L'istruzione `[X, Y] =meshgrid(x, y)` prende in input i vettori `x` e `y` e restituisce in output le matrici `X` e `Y` tali che: le righe di `X` sono tutte uguali al vettore `x`, e le colonne di `Y` sono tutte uguali al vettore `y`:

```
octave:1> x=[1:5]
x =

   1   2   3   4   5

octave:2> y=[6:11]
y =

    6    7    8    9   10   11

octave:3> [X,Y]=meshgrid(x,y);
octave:4> X
X =

   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5

octave:5> Y
Y =

    6    6    6    6    6
    7    7    7    7    7
    8    8    8    8    8
    9    9    9    9    9
   10   10   10   10   10
   11   11   11   11   11
```

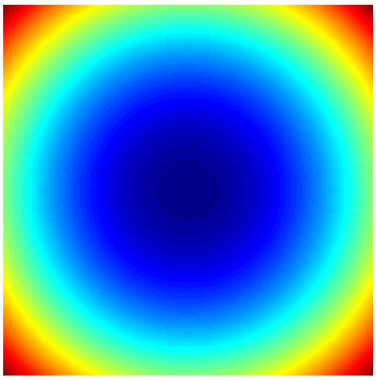
Questo comando è molto utile per valutare una funzione definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ su una griglia di punti del rettangolo. Infatti, se la variabile `x` contiene una "discretizzazione" dell'intervallo $[a,\ b]$, e se `y` contiene una discretizzazione dell'intervallo $[c,\ d]$, l'istruzione `[X, Y] =meshgrid(x, y)` permette di rappresentare i punti della griglia corrispondente nel rettangolo $[a\ b] \times [c\ d]$ in questo modo: l'elemento di coordinate `(X(i,j),Y(i,j)` è il generico punto di indici i, j sulla griglia. In pratica, l'istruzione `meshgrid` permette di valutare una funzione $f(x, y)$ definita su $\mathbb{R}^2$ in una griglia di punti senza utilizzare alcun ciclo. Infatti, se voglio ad esempio valutare la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nei punti di una griglia nel rettangolo $[-0.5\ 0.5] \times [-0.5\ 0.5]$ basta dare i seguenti comandi:

```
octave:6> x=-0.5:0.02:.5;
octave:7> y=x;
octave:8> [X,Y]=meshgrid(x,y);
octave:9> A=X.^2+Y.^2;
```

La variabile `A` contiene i valori della funzione $f(x, y)$ sulla griglia del rettangolo $[-0.5\ 0.5] \times [-0.5\ 0.5]$ discretizzato mediante i vettori `x` e `y`.

Per visualizzare l'immagine possiamo dare il comando

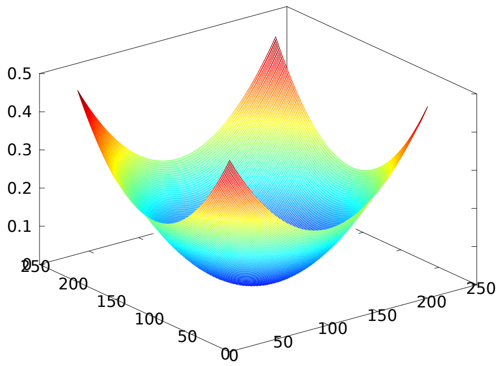
```
octave:10> imagesc(A);
```



che produce

Se invece vogliamo visualizzare il grafico in $\mathbb{R}^3$ diamo il comando

```
octave:11> mesh(A);
```



che produce .

Provare a usare **`surf`** al posto di **`mesh`**.

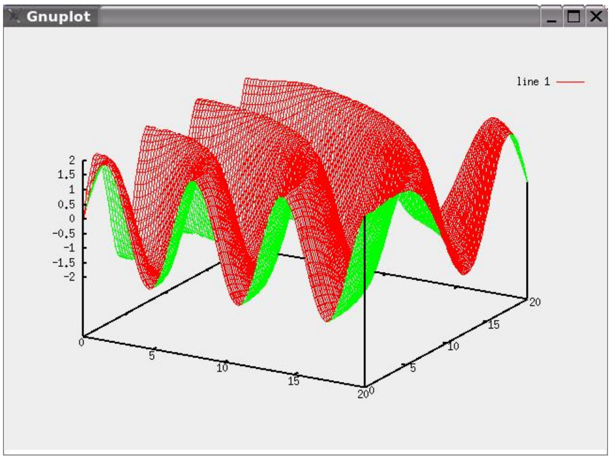
Esercizio 1. Utilizzando le function **`meshgrid`** e **`mesh`** si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = 2\sin((x^2 + y^2)^{1/2})$, $(x, y) \in [0\ 20] \times [0\ 20]$
2. $f(x, y) = (x^2/2 + y^2/3)/2$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
3. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
4. $f(x, y) = xe^{-(x-y^2)^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere.

Suggerimento: Potete definire la funzione $f(x, y)$ in modo "anonimo" sulla linea di comando. Ad esempio, la prima funzione può essere definita in quato modo:

```
octave:11> f=@(x,y) 2.*sin( (x.^2 + y.^2).^(1/2));
```

Per la prima funzione dovreste ottenere la figura



È possibile disegnare anche le curve di livello mediante la funzione `contour`. Ad esempio, per disegnare le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ nel rettangolo $[-3\ 3] \times [-3\ 3]$, basta dare i comandi:

```
octave:12> f=@(x,y) x.^2 - y.^2;
octave:13> x=linspace(-3,3,20);
octave:14> y=linspace(-3,3,20);
octave:15> [X,Y] = meshgrid(x,y);
octave:16> contour(X,Y,f(X,Y))
```

Se volessi disegnare la curva di livello $f(x, y) = c$, dove c è assegnato, ad esempio $c = 1$, dovrei dare il comando:

```
octave:20> c=1;
octave:21> v=[c; c];
octave:22> contour(X,Y,f(X,Y),v)
```

Questo ultimo comando permette di disegnare curve definite implicitamente.

Esercizio 2. Usando il comando `contour` disegnare la curva $x^2+2xy+y^2-2x = 3$ con $(x, y) \in [-3\ 3] \times [-3\ 3]$,

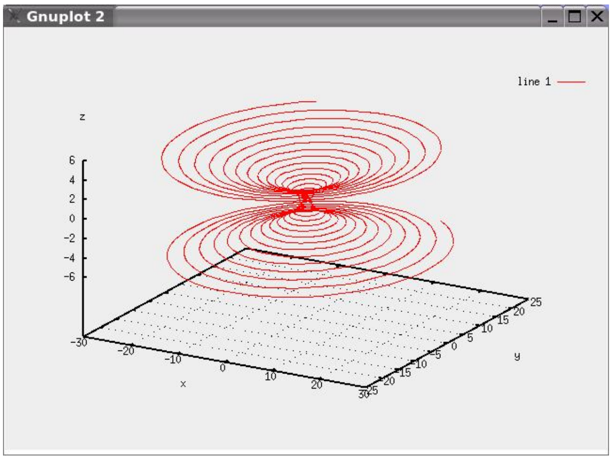
2 Curve parametriche

Le seguenti equazioni parametrizzano una curva in $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 + t^2)\sin(20t), \\ y(t) &= (1 + t^2)\cos(20t), \\ z(t) &= t, \quad t \in [-5, 5]. \end{aligned}$$

La curva può essere disegnata usando il comando `plot3`

```
octave:17> t=[-5:0.01:5];
octave:18> x=(1+t.^2).*cos(20*t);
octave:19> y=(1+t.^2).*sin(20*t);
octave:20> z=t;
octave:21> plot3(x,y,z)
```

che produce l'immagine 

Esercizio 3. 1. Disegnare una spirale con raggio costante.

2. Disegnare le curve $(x(t), y(t), z(t))$ dove:

   (a) $x(t) = (2 + \cos(1.5t))\cos(t)$, $y(t) = (2 + \cos(1.5t))\sin(t)$, $z(t) = 2\sin(1.5t)$, con $t \in [0, 4\pi]$.

   (b) $x(t) = (4+\sin(20t))\cos(t)$, $y(t) = (4+\sin(20t))\sin(t)$, $z(t) = \cos(20t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, con $t \in [-2, 2]$.

3 Superfici parametriche

Vogliamo disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$x(r,t) = r\cos(t)$$
$$y(r,t) = r\sin(t)$$
$$z(r,t) = r,$$

dove $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$. Per far questo diamo i comandi:

```
octave:1> r=linspace(0,1,30);
octave:2> t=linspace(0,2*pi,30);
octave:3> [R,T]=meshgrid(r,t);
octave:4> x=R.*cos(T);
octave:5> y=R.*sin(T);
octave:6> z=R;
octave:7> mesh(x,y,z)
```

Perché otteniamo un cono? Provare a usare il comando `surf`, poi `shading interp` e `axis off`.

Esercizio 4. Disegnare una sfera. Dare il comando `axis(‘‘equal’’)` per avere stesse proporzioni sui tre assi coordinati.

Esercizio 5. Disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$x(u,v) = 2(1 - e^{u/(6\pi)})\cos(u)\cos^2(v/2)$$
$$y(u,v) = 2(-1 + e^{u/(6\pi)})\sin(u)\cos^2(v/2)$$
$$z(u,v) = 1 - e^{u/(3\pi)} - \sin(v) + e^{u/(6\pi)}\sin(v),$$

dove $u \in [0, 6\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Ottenete una conchiglia?

Cercate sul web le definizioni delle superfici parametriche "Klein bottle", "Enneper's surface", "Ellipsoid", "Hyperboloid of two sheets", "Lissajous surface", "Whitney umbrella", "Steiner surface", e disegnatele.

4 Esercizi da inviare al docente

Inviare i comandi che sono stati dati per svolgere i seguenti esercizi:

Esercizio 6. Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = \left|\frac{1}{1-(x+iy)^{40}}\right|$ dove i è l'unità immaginaria e $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$. Dovreste ottenere una torta di compleanno con 40 candeline.

Esercizio 7. Disegnare il "Folium di Cartesio", cioè la curva $x^3 + y^3 = 3xy$, con $(x, y) \in [-3\ 3] \times [-3\ 3]$. Se la curva non si chiude, raffinare la discretizzazione.

Esercizio 8. Disegnare la curva in $\mathbb{R}^3$ data da: $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(2t)$, $z(t) = \sin(3t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 9. Disegnare la striscia di Moebius, sapendo che è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}
x(u,v) &= \cos(u) + v\cos(u/2)\cos(u)\\
y(u,v) &= \sin(u) + v\cos(u/2)\sin(u)\\
z(u,v) &= v\sin(u/2),
\end{aligned}$$

con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-0.4, 0.4]$.