

Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 4 - 26/3/2014

1 Il frattale *fern* (felce)

Il frattale *fern* si ottiene disegnando una successione di punti generati casualmente sul piano. Se \mathbf{x} è un vettore di 2 componenti che rappresenta le coordinate di un punto sul piano, il frattale è generato applicando successivamente delle trasformazioni affini del tipo

$$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dove A e \mathbf{b} sono una matrice 2×2 e un vettore di dimensione 2 assegnati. Ci sono quattro differenti trasformazioni affini, che vengono scelte con probabilità diversa. Il frattale viene generato disegnando tutti i punti generati in questo modo.

La trasformazione scelta con maggiore probabilità è definita da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Questa trasformazione ruota e “accorcia” un poco \mathbf{x} , e aggiunge 1.6 alla seconda componente. L’applicazione ripetuta di questa trasformazione muove un punto in alto e verso destra, costruendo la punta della foglia.

Esercizio 1. Scegliere come vettore \mathbf{x} il vettore di coordinate (1,1), cioè dare il comando $\mathbf{x}=[1; 1]$. Applicare 50 volte la trasformazione $\mathbf{x}=A_1*\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ e disegnare sul piano tutti punti ottenuti.

Suggerimento: Costruire una matrice \mathbf{S} con 2 colonne tale che la riga i -esima contiene le coordinate del vettore \mathbf{x} al passo i -esimo; per fare questo inizializzare \mathbf{S} (ad esempio con il comando $\mathbf{S}=\mathbf{x}'$;) e ad ogni passo aggiungere la nuova riga (ad esempio con il comando $\mathbf{S}=[\mathbf{S}; \mathbf{x}']$;) . Per disegnare i punti basta scrivere `plot(S(:,1),S(:,2),'*')`.

Le altre tre trasformazioni che vengono scelte con probabilità minore spostano il punto sulla foglia in basso a destra, o sulla foglia in basso a sinistra, o sul gambo. Queste sono ottenute con le tre coppie matrice/vettore:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Esercizio 2. Fare come nell'Esercizio 1 con le coppie matrice/vettore (A_2, \mathbf{b}_2) , (A_3, \mathbf{b}_3) , (A_4, \mathbf{b}_4) .

Il frattale Fern è costruito nel modo seguente. Definiamo il vettore $\mathbf{p} = [0.85 \ 0.92 \ 0.99 \ 1]^T$ che rappresenta le probabilità di scegliere una delle 4 trasformazioni. La successione di punti $\{\mathbf{x}_k\}_k$ del piano è generata nel seguente modo. Si pone $\mathbf{x}_1 = [0.5 \ 0.5]^T$, e per $k = 1, 2, \dots$:

- si sceglie casualmente, con distribuzione uniforme, un numero reale r compreso tra 0 e 1. Se $r \leq p_1$ si pone $i = 1$, se $p_1 < r \leq p_2$ si pone $i = 2$, se $p_2 < r \leq p_3$ si pone $i = 3$, altrimenti si pone $i = 4$;
- si definisce $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$.

Esercizio 3. Si scriva una function `fern(m)` che disegna sul piano i punti rappresentati dai vettori \mathbf{x}_k , per $k = 1, \dots, m$.

Suggerimenti:

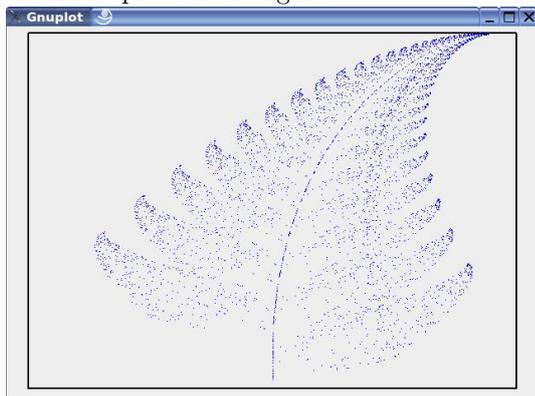
- per generare il numero casuale r utilizzare la funzione `rand`;
- per velocizzare la visualizzazione grafica, memorizzare tutti gli elementi della successione in una variabile `S` (come fatto negli esercizi precedenti), e disegnarli alla fine con un unico comando `plot`.
- dare il comando `axis('off')` per rimuovere gli assi cartesiani

Provare con diversi valori di `m` (per testare il funzionamento della function provare con `m` non troppo grande).

Il comando

```
octave:1> fern(5000);
```

dovrebbe produrre la figura



Provare a modificare il vettore \mathbf{p} , e l'elemento non zero della matrice A_4 . Come cambia la figura?

Esercizio 4. Al sito

<http://www.home.aone.net.au/~byzantium/ferns/fractal.html> trovate dettagli in più su questo frattale. Modificate le matrici A_i e i vettori \mathbf{b}_i , utilizzando i parametri suggeriti. Otterrete vari tipi di foglie.

2 Il triangolo di Sierpinski

Generalizziamo l'iterazione che genera il frattale *fern*. Sia n un intero maggiore di 1 e siano A_1, \dots, A_n matrici reali 2×2 assegnate, e siano $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ vettori di dimensione 2 assegnati. Supponiamo che le matrici A_i e i vettori \mathbf{b}_i , $i = 1, \dots, n$, siano memorizzati nella matrice C , di dimensione $(2n) \times 3$, definita nel modo seguente:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Si scriva una function `fract(C, m)` che disegni i punti sul piano generati come descritto di seguito:

- si costruisce il vettore `dets` di dimensione n tale che la componente j di `dets` contiene il modulo di $\det(A_j)$ (per calcolare il determinante si usi il comando `det`);
- si modifica il vettore `dets` nel modo seguente:
`dets = max(dets, max(dets)/(25*n));`
`dets = dets/sum(dets);`
- si crea il vettore `p` di dimensione n con componenti
`0, dets(1), dets(1)+dets(2), . . . , dets(1)+...+dets(n-1)`
- si disegna sul piano il punto le cui coordinate sono gli elementi del vettore \mathbf{x}_k , per $k=20+1, 20+2, \dots, 20+m$, dove la successione $\{\mathbf{x}_k\}$ è definita nel seguente modo:
 1. \mathbf{x}_1 è scelto in modo casuale
 2. per $k = 1, 2, \dots$ si sceglie un numero casuale r compreso tra 0 e 1, si pone $i=\text{sum}(p < r)$ e si definisce $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$.

Si provi la function con le seguenti matrici:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ s & -x & t \\ x & s & 0 \\ s & x & 0.5 \\ -x & s & x \\ t & 0 & t_2 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

dove $x = \frac{1}{3} \sin(\pi/3)$, $s = 1/6$, $t = 1/3$, $t_2 = 2/3$.

Con la matrice S dovreste ottenere il triangolo di Sierpinski

