# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 3 - 19/3/2014

## 1 Le immagini in octave

Octave gestisce i colori mediante delle matrici di dimensione $h \times 3$, dove $h$ rappresenta il numero di colori a disposizione, e ciascuna riga della matrice rappresenta un colore mediante una terna (r, g, b) che definisce la quantità di rosso, verde e blu. La mappa standard dei colori è definita dalla matrice `colormap`. La matrice `colormap` è una matrice $64 \times 3$ , con elementi compresi tra 0 e 1:

```
octave:24> format short
octave:25> size(colormap)
ans =

   64    3

octave:26> colormap
ans =

   0.00000   0.00000   0.50000
   0.00000   0.00000   0.56349
   0.00000   0.00000   0.62698
   0.00000   0.00000   0.69048
   0.00000   0.00000   0.75397
   0.00000   0.00000   0.81746
   0.00000   0.00000   0.88095
   0.00000   0.00000   0.94444
   0.00000   0.00794   1.00000
lines 1-9
```

Octave rappresenta le immagini mediante una matrice $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,p,j=1,\dots,q}$ di interi dimensione $p \times q$, associando all'elemento $(i, j)$ della matrice $A$ un colore opportuno. Più precisamente, se $a_{i,j} = k$, il colore del pixel di posto $(i, j)$ dell'immagine è quello definito dalla $k-$esima riga della matrice `colormap`.

Se $A$ è una matrice $p \times q$ con elementi interi compresi tra 1 e 64, il comando `image(A)` produce un'immagine $p \times q$, il cui elemento (i,j) è rappresentato dal colore sulla riga di indice $a_{i,j}$ della matrice `colormap`. Ad esempio:

```
octave:28> A=zeros(64*5, 64*3);
octave:29> for k=1:64, A(5*k-4: 5*k, : ) = k; end
octave:30> image(A)
```

La `colormap` può essere modificata, ad esempio:

```
octave:31> colormap( ocean(64) );
```

Per ripristinare quella di default:

```
octave:33> colormap( "default" );
```

Si modifichi a piacere la matrice $A$ e si disegni l'immagine corrispondente. Se gli elementi della matrice $A$ non sono interi compresi tra 1 e il numero di righe della `colormap`, conviene usare l'istruzione `imagesc(A)`, che costruisce l'immagine riscalando opportunamente gli elementi della matrice A (si veda l'help). Ad esempio:

```
octave:10> A=rand(64);
octave:11> imagesc(A)
```

## 2 Il segno di un numero complesso

Dato il numero complesso $z$ non immaginario puro, definiamo

$$\mathrm{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \mathrm{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

Il segno si può ottenere mediante le istruzioni `sign` e `real`:

```
octave:1> z=4*exp(i*6);
octave:2> s=sign(real(z))
s =  1
octave:3> z
z =  3.8407 - 1.1177i
```

Si può dimostrare che il segno del numero complesso $z$ è il limite della successione $\{x_k\}_k$ definita come:

$$x_1 = z,$$
$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_k^{-1}}{2}, \quad k \geq 0$$

*Esercizio* 1. Si scriva la function `[s,n] = segno(z, maxiter, eps)` che:

1. prende come input il numero complesso `z`, l'intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;
2. calcola gli elementi della successione $\{x_k\}_k$ fino all'indice $k = n$ tale che o $n =$`maxiter` oppure $|x_n - x_{n-1}| <$ `eps`;
3. restituisce in output `s`, che è l'ultimo elemento calcolato della successione, e `n`, il numero di iterazioni effettuate.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:7> format long e
octave:8>  [s, n]=segno(z,10,1.e-10)
s = 1.00000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
n =  7
```

Scegliere un numero complesso con parte reale piccola, ad esempio $10^{-2}$. Quante iterazioni servono per avere una differenza più piccola ad esempio di $10^{-12}$?

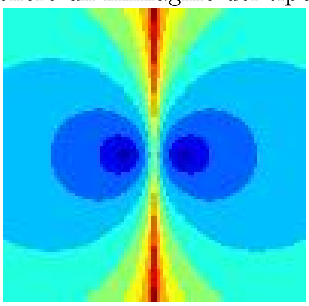
Che cosa succede se scelgo come $z$ un numero immaginario puro?

Vogliamo ora disegnare i bacini di attrazione della successione $\{x_k\}_k$ nel rettangolo del piano complesso $[a,b] \times [ic, id]$, dove $[a,b]$, $[c,d]$ sono intervalli della retta reale. Per far questo costruiamo un reticolo nel rettangolo $[a,b] \times [ic, id]$ e per ciascun punto del reticolo contiamo il numero di iterazioni utilizzate dalla function dell'esercizio precedente:

*Esercizio* 2. Si scriva una function `[x, y, iter] = bsegno( a, b, c, d, maxiter, eps)` che:

1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli $[a,b]$, $[c,d]$, il numero intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;
2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli piccoli, ad esempio mediante il comando `x=linspace(a,b,100)`, `y=linspace(c,d,100)`;
3. costruisce la matrice `iter` di dimensione `length(x) x length(y)` tale che l'elemento `(h,k)` di `iter` è il numero di elementi della successione calcolati con la function `segno`, a partire da `z=x(h) + i*y(k)`;
4. restituisce in output le variabili `x,y,iter`.

Si disegnino i bacini di attrazione mediante il comando `imagesc(x, y, iter)`. Con i valori `a=c=-5, b=d=5, eps = 1.e-8, maxiter = 20` dovreste ottenere un'immagine del tipo



Provare con altri valori. In particolare modificare a, b, c, d per fare degli zoom intorno a 1 o -1, o vicino all'asse immaginario.

# 3 L'insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è definito come l'insieme dei punti $s$ del piano complesso tali che la successione $\{z_n\}_n$ è limitata, dove

$$z_1 = s,$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1.$$

In particolare il punto $s = 0$ appartiene all'insieme di Mandelbrot. Si vuole disegnare l'insieme di Mandelbrot sul piano complesso. Per far questo costruiamo un reticolo in un rettagolo $[ab] \times [ic, id]$ del piano complesso, e per ciascun punto $s$ del reticolo assegnamo ad una matrice $W$ il valore di $z_K$, dove $K$ è un opportuno indice della successione:

*Esercizio* 3. Si scriva una function `W = mandel (a, b, c, d, K)` che:

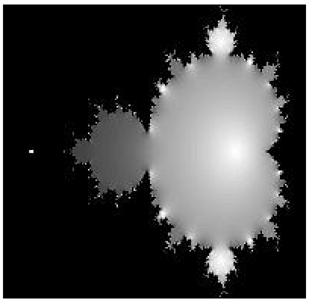
1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli `[a,b]`, `[c,d]` e il numero intero positivo `K`;
2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli "piccoli", assegnando ad esempio alle variabili `x` e `y` le discretizzazioni degli intervalli `[a,b]` e `[c,d]`, rispettivamente;
3. costruisce la matrice `W` tale che l'elemento `(h,k)` di `W` è il `K`-esimo elemento della successione $\{z_n\}_n$, ottenuto con $s =$`x(h)+i*y(k)`.

*Attenzione*: per certi valori di $s$ la successione $\{z_n\}_n$ diverge molto velocemente, per cui il valore calcolato di $z_K$ risulta essere `NaN` (Not a Number). Quindi, al punto 3, inserire un controllo sulla grandezza del modulo di $z_n$, per n=1,...,K: ad esempio, se il modulo è maggiore di `1.e16`, si interrompe l'iterazione e si assegna a `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato.

Disegnare l'immagine mediante il comando `imagesc (exp(-abs(W')))`: l'applicazione della funzione `exp` ha l'effetto di appiattire vicino a zero gli elementi grandi.

Il comando

```
octave:1> W=mandel(-2,0.6,-1,1,20);
```

dovrebbe produrre la figura 

Fare degli "zoom" provando con altri valori di `a,b,c,d`.

# 4 Altri insiemi di Mandelbrot

Si consideri ora la successione $\{z_n\}_n$ definita come

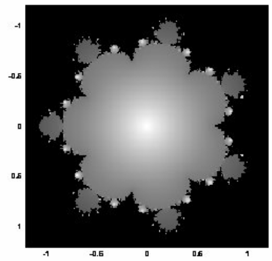
$$z_1 = s,$$
$$z_{n+1} = z_n^p + s, \quad n \geq 1,$$

dove $s$ è un numero complesso fissato, e $p$ è un intero maggiore di 1 fissato.

*Esercizio* 4. Si fissi $p$ e, come nell'esercizio precedente, si disegni l'insieme dei punti $s$ del piano complesso tali che la successione è limitata. Per far questo si definisca la function `W = mandelp(a,b,c,d,p,K)` in modo analogo all'esercizio precedente. Si provino diversi valori di $p$.

Il comando

```
octave:5> W=mandelp(-1.2,1.2,-1.2,1.2,8,20);
```

dovrebbe produrre l'immagine 


# 5 Insiemi di Julia

Sia $s$ un numero complesso fissato e si consideri la successione $\{z_n\}_n$ definita come:

$$z_1 \quad \text{numero complesso fissato in modo abritrario}$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1.$$

Vogliamo disegnare i bacini di attrazione della successione, al variare di $z_1$ scelto in un rettangolo `[a,b] x i [c, d]` del piano complesso.

*Esercizio* 5. Si scriva una function `W=julia(a, b, c, d, s, K)` che disegni i bacini di attrazione della successione, al variare di $z_1$ nel rettangolo del piano complesso `[a,b] x i [c, d]`, dove `a,b,c,d` sono reali:

1. si suddividano gli intervalli [a,b] e [c,d] in sottointervalli piccoli, ottenendo una griglia del rettangolo [a,b] x i [c, d];

2. per ciascun punto `x(h)+i*y(k)` della griglia: si calcolino gli elementi della successione $z_n$ , per n=2,...,K, ottenuti con $z_1$ = `x(h)+i*y(k)` (come negli esercizi precedenti, si interrompa il calcolo se $|z_n|$ è "troppo grande"); si definisca `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato della successione;

3. si disegni la figura definita da `W`

Scegliendo [a,b]=[-1.5, 1.5], [c, d] = [-1.5, 1.5], s = 0.27334 - 0.00742 i , k=20, dovreste ottenere l'immagine