Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 1 - 27/2/2013

1 Numeri complessi

Le variabili `i,j,I,J` rappresentano l'unità immaginaria:

```
octave:4> i
ans =  0 + 1i
octave:5> j
ans =  0 + 1i
octave:6> I
ans =  0 + 1i
octave:7> J
ans =  0 + 1i
octave:8> sqrt(-1)
ans = 0 + 1i
```

Si possono fare facilmente operazioni tra numeri complessi:

```
octave:30> x = 3 + i*9;
octave:31> y = -5 + i*2;
octave:32> x-y
ans = 8 + 7i
octave:33> x+y
ans =  -2 + 11i
octave:34> x*y
ans = -33 - 39i
octave:35> x/y
ans = 0.10345 - 1.75862i
octave:36> sqrt(x)
ans = 2.4987 + 1.8009i
octave:37> x^2
ans = -72 + 54i
```

Le funzioni `conj, abs, imag, real` calcolano rispettivamente coniugato, modulo, parte immaginaria, parte reale. Ad esempio si verifichi sperimentalmente che $|x| = (x\bar{x})^{1/2}$:

```
octave:9> x=2+4i
x =  2 + 4i
octave:10> y=conj(x)
y =  2 - 4i
octave:11> sqrt(x*y)
ans =  4.4721
```

```
octave:12> abs(x)
ans =   4.4721
octave:13> abs(y)
ans =   4.4721
```

Oppure che $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$:

```
octave:14> theta=10;
octave:15> x=cos(theta)+i*sin(theta)
x = -0.83907 - 0.54402i
octave:16> y=exp(i*theta)
y = -0.83907 - 0.54402i
octave:17> x-y
ans = 0
```

Data la rappresentazione cartesiana $x = a + ib$, possiamo trovare la rappresentazione polare $x = re^{i\theta}$ mediante le funzioni `abs` e `angle`:

```
octave:18> x=-3+2*i
x = -3 + 2i
octave:19> r=abs(x)
r = 3.6056
octave:20> theta=angle(x)
theta = 2.5536
octave:21> y=r*exp(i*theta)
y = -3 + 2i
```

Per disegnare il numero complesso `x` sul piano complesso, è sufficiente fare:

```
octave:22> plot(real(x),imag(x),'o')
```

Oppure, se `x` **non** ha parte immaginaria nulla, basta dare il comando `plot(x)`:

```
octave:22> x = 2 + i*5;
octave:22> plot(x,'o')
```

Utilizzando gli array, si possono disegnare "tanti" punti sul piano complesso, ad esempio:

```
octave:23> t=[0:0.01:2];
octave:24> x=[t.^2];
octave:25> y=[2*t-1];
octave:26> z=x+i*y;
octave:27> plot(z,'.')
```

Esercizio 1. Scrivere una function `cerchio(R)` che disegni la circonferenza di centro 0 e raggio `R` (utilizzare il comando `axis('equal')` per fare in modo che la scala orizzontale sia la stessa che la scala verticale). Scrivere poi una function `cerchio1(c,R)` che disegni la circonferenza di centro c e raggio `R`

Se conosciamo un numero complesso espresso mediante le suo coordinate polari, ad esempio $x = 10e^{2i}$, possiamo disegnarlo utilizzando il comando polar (si dia il comando help polar per conoscerne il funzionamento):

```
octave:28> polar(2,10,'*')
```

Esercizio 2. Utilizzando il comando polar si disegnino sul piano complesso i punti $\sin(2t)\cos(2t)e^{it}$, per $t \in [0, 2\pi]$.

2 Rotazioni e traslazioni sul piano complesso

Un poligono può essere disegnato collegando i numeri complessi che rappresentano i vertici:

```
octave:28> z=[0 1 1+2i 3i 0] # osservare un vertice ripetuto!
z =

  0 + 0i   1 + 0i   1 + 2i   0 + 3i   0 + 0i

octave:29> plot(z,'*-')
octave:30> axis([-1 2 -1 4], "equal")
```

Se z è un numero complesso, la traslazione di w si esegue facilmente con l'aritmetica complessa, eseguendo l'operazione $y = z + w$. La traslazione della quantità $w = 0.5 + i$ si ottiene così:

```
octave:31> w=0.5+i;
octave:32> y=z+w;
octave:33> hold on
octave:34> plot(real(y),imag(y),'g-')
```

Anche le rotazioni si rappresentano facilmente con l'aritmetica complessa: se z è un numero complesso, la rotazione di un angolo θ si ottiene moltiplicando z per $e^{i\theta}$. Con questa osservazione ruotiamo la figura originale di $\pi/6$ radianti:

```
octave:35> mu=mean(z(1:end-1)) # calcola la media delle coordinate dei vertici
mu = 0.50000 + 1.25000i
octave:36> theta=pi/6;
octave:37> omega=exp(i*theta);
octave:38> y=omega*(z-mu)+mu; # trasla la figura per mettere il centro
# nell'origine, esegue la rotazione, e di nuovo trasla
octave:39> plot(real(y),imag(y),'b-')
```

3 Giochetti con la FFT

La funzione `fft` calcola la trasformata discreta di Fourier (si veda l'help). Per ottene la matrice di Fourier basta calcolare la trasformata della matrice identità:

```
octave:21> X=fft(eye(4))
X =

   1 + 0i    1 + 0i    1 + 0i    1 + 0i
   1 + 0i    0 - 1i   -1 + 0i    0 + 1i
   1 + 0i   -1 + 0i    1 + 0i   -1 + 0i
   1 - 0i    0 + 1i   -1 - 0i    0 - 1i
```

Esercizio 3. Verificare sperimentalmente che la seconda colonna della matrice `X=fft(eye(n))` ha elementi ω_n^{k-1}, per $k = 1, \ldots, n-1$, dove $\omega_n = e^{-2\pi i/n}$.

Esercizio 4. Fissato `n`, calcolare `X=fft(eye(n))` e, utilizzando il comando `plot` disegnare le n curve a tratti che si ottiengono collegando i numeri complessi sulla i-esima colonna di `X`, per `i`=1,. . . ,`n`.

Tips. Se `X` è una array di numeri complessi, il comando `plot(X)` traccia un grafico sul piano complesso per ogni colonna di `X`.

Provare con `n`=4, poi `n`=17. Che figura si ottiene?

4 Il logaritmo

La funzione `log` calcola il logaritmo nel seguente modo: se `z` è reale positivo allora `log(z)` è il logaritmo naturale reale; altrimenti, posto `z = x + i*y`, `log(z)=log(abs(z)) + i*atan2(y,x)`. La funzione `atan2(y,x)` calcola l'arcotangente di `y/x` nel range $(-\pi, \pi)$.

Esercizio 5. Calcolare e disegnare il logaritmo di "tanti" punti che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1, per verificare graficamente che la funzione `log` mappa la circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel segmento $(-i\pi, i\pi)$.

Tips. Usare le operazioni "vettoriali" per i calcoli e per il plot.

Esercizio 6. Disegnare sul piano complesso le circonferenze di centro 0 e raggio $1, 2, \ldots, 10$, applicare la funzione `log(z)` ai punti utilizzati per disegnare le circonferenze, e disegnare i nuovi punti sul piano complesso.

Esercizio 7. Utilizzando la funzione `rand` moltiplicata per uno scalare piccolo (ad esempio `1.e-4`), perturbare la parte reale e immaginaria dei punti sulle circonferenze dell'esercizio precedente, e disegnare il loro logaritmo.

5 T-Puzzle

(Se avete finito tutto il resto). Avete mai sentito parlare di "T-puzzle"? È un popolare puzzle che consiste nel formare la lettera T mediante l'accostamento di quattro figure geometriche, costituite da 2 trapezi, un triangolo e un pentagono irregolare. Provate a cercare con Google "T-puzzle" per avere maggiori dettagli. I singoli pezzi possono essere rappresentati con l'aritmetica complessa, e le singole mosse mediante rotazioni e traslazioni sul piano complesso. Provate a costruire il vostro T-puzzle elettronico, definendo i vettori che rappresentano le figure geometriche e dando la soluzione, espressa mediante rotazioni e traslazioni.