

Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 7 - 18/4/2012

1 Polinomi

I polinomi in Octave sono definiti mediante il vettore dei loro coefficienti: se \mathbf{p} è un array di dimensione $1 \times m$, esso identifica il seguente polinomio nella variabile x di grado al più $m - 1$

$$p(1)x^{m-1} + p(2)x^{m-2} + \dots + p(m-1)x + p(m).$$

Le funzioni `poly`, `roots`, `polyval`, `polyvalm`, `polyder`, `conv`, `deconv` permettono di eseguire facilmente alcune operazioni con e sui polinomi. Al sito http://sunsite.univie.ac.at/textbooks/octave/octave_25.html#SEC160 sono elencate le function di Octave che permettono di effettuare operazioni con polinomi.

Ad esempio, calcoliamo gli zeri del polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$:

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> z=roots(p)
z =
```

```
-0.61803
 1.61803
```

Verifichiamo che quelli calcolati siano gli zeri:

```
octave:5> polyval(p, z)
ans =
```

```
-1.1102e-16
 2.2204e-16
```

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico $p(x)$. Verifichiamolo utilizzando l'istruzione `poly`:

```
octave:9> A=[0 1; 1 1];
octave:10> pc=poly(A)
pc =
```

```
1.0000 -1.0000 -1.0000
```

Secondo il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio caratteristico calcolato in A vale zero. Verifichiamolo:

```
octave:11> polyvalm(pc,A)
ans =
    9.2057e-17    1.4895e-16
    1.4895e-16    2.4101e-16
```

I polinomi possono essere moltiplicati e divisi mediante le istruzioni `conv` e `deconv`. Ad esempio dividiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ per $x - 2$, e poi ricostruiamo il polinomio iniziale:

```
octave:12> g=[1 -6 12 -8];
octave:13> h=[1 -2];
octave:14> [q,r]=deconv(g,h)
q =
    1    -4     4
r =
    0     0     0     0
octave:15> conv(h,q)
ans =
    1    -6    12    -8
```

Esercizio 1. Si scriva una function che, preso come input un vettore \mathbf{p} con i coefficienti di un polinomio, un numero reale \mathbf{t} , e un numero intero \mathbf{n} , disegna sul piano complesso gli zeri dei polinomi ottenuti sommando $\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}$ al coefficiente costante del polinomio iniziale, per $\mathbf{h}=0, \dots, \mathbf{n}$. Si provino i seguenti esempi:

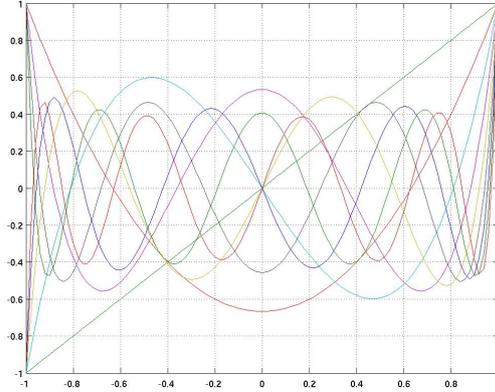
1. il polinomio $x^4 - 1$, $t = 0.05$, $n = 20$.
2. il polinomio $(x - 1)^4$, $t = 0.02$, $n = 40$.
3. il polinomio i cui zeri sono $1, 2, 3, \dots, 20$, $t = 0.05$, $n = 20$

Esercizio 2 (Polinomi di Legendre). I polinomi di Legendre sono definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = ((2n - 1)xp_{n-1}(x) - (n - 1)p_{n-2}(x))/n, \quad n \geq 3,$$

dove $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_n(x)$ è l' n -esimo polinomio di Legendre. Si disegni il grafico dei primi K polinomi di Legendre nell'intervallo $[-1, 1]$, dove $K > 1$ è un intero assegnato.

Per $K = 10$ dovrete ottenere la figura



Esercizio 3. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si osservi che i coefficienti delle potenze di grado dispari del polinomio $p(x)p(-x)$ sono nulli. Pertanto $p(x)p(-x)$ può essere visto come un polinomio di grado ancora n valutato in x^2 . È dunque possibile generare una successione $\{p_i(x)\}_i$ di polinomi di grado n mediante la formula ricorsiva :

$$p_{i+1}(x^2) = p_i(x)p_i(-x)/r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

dove r_i è il massimo modulo dei coefficienti di $p_i(x)p_i(-x)$, e $p_0(x) = p(x)$. In altre parole, a meno della divisione per r_i , i coefficienti di $p_{i+1}(x)$ sono i coefficienti delle potenze pari di $p_i(x)p_i(-x)$. La divisione per r_i ha lo scopo di non far divergere i coefficienti dei polinomi.

1. Si scriva una function che genera i vettori di dimensione $n + 1$ che definiscono i coefficienti dei polinomi $p_i(x)$, per $i = 1, \dots, K$, dove $K > 1$ è un intero fissato.
2. Si osservi la successione di polinomi nei seguenti casi:
 - (a) $p(x)$ con zeri 0.1, -0.7, 10, -2.9, 6.934, 0.76, -29
 - (b) $p(x)$ con zeri 11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5
 - (c) $p(x)$ con zeri 11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 6
 - (d) $p(x)$ con zeri -1, 2, 0.7, 3, 5
 - (e) $p(x)$ con zeri 1, -1, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5

La successione di polinomi è convergente? Se converge, a che cosa converge?