Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 7 - 4/5/2011

1 Polinomi

I polinomi in Octave sono definiti mediante il vettore dei loro coefficienti: se `p` è un array di dimensione `1 x m`, esso identifica il seguente polinomio nella variabile x di grado al più $m-1$

$$\texttt{p(1)}x^{m-1} + \texttt{p(2)}x^{m-2} + \cdots + \texttt{p(m-1)}x + \texttt{p(m)}.$$

Le funzioni `poly`, `roots`, `polyval`, `polyvalm`, `polyder`, `conv`, `deconv` permettono di eseguire facilmente alcune operazioni con e sui polinomi. Al sito `http://sunsite.univie.ac.at/textbooks/octave/octave_25.html#SEC160` sono elencate le function di Octave che permettono di effettuare operazioni con polinomi.

Ad esempio, calcoliamo gli zeri del polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$:

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> z=roots(p)
z =

  -0.61803
   1.61803
```

Verifichiamo che quelli calcolati siano gli zeri:

```
octave:5> polyval(p,z)
ans =

  -1.1102e-16
   2.2204e-16
```

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico $p(x)$. Verifichiamolo utilizzando l'istruzione `poly`:

```
octave:9> A=[0 1; 1 1];
octave:10> pc=poly(A)
pc =

   1.0000   -1.0000   -1.0000
```

Secondo il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio caratteristico calcolato in A vale zero. Verifichiamolo:

```
octave:11> polyvalm(pc,A)
ans =

   9.2057e-17   1.4895e-16
   1.4895e-16   2.4101e-16
```

I polinomi possono essere moltiplicati e divisi mediante le istruzioni `conv` e `deconv`. Ad esempio dividiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ per $x - 2$, e poi ricostruiamo il polinomio iniziale:

```
octave:12> g=[1 -6 12 -8];
octave:13> h=[1 -2];
octave:14> [q,r]=deconv(g,h)
q =

   1  -4   4

r =

   0   0   0   0

octave:15> conv(h,q)
ans =

    1   -6   12   -8
```

Esercizio 1. Si scriva una function che, preso come input un vettore `p` con i coefficienti di un polinomio, un numero reale `t`, e un numero intero `n`, disegna sul piano complesso gli zeri dei polinomi ottenuti sommando `h`·`t` al coefficiente costante del polinomio iniziale, per `h=0,...,n`. Si provino i seguenti esempi:

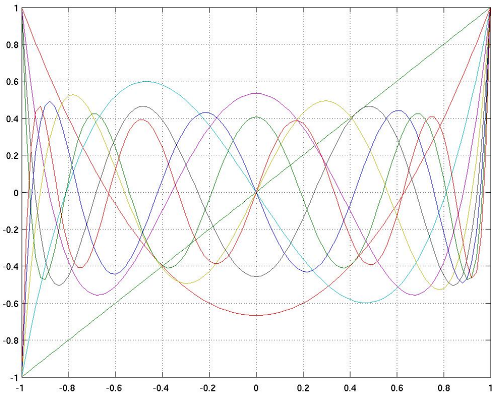
1. il polinomio $x^4 - 1$, $t = 0.05, n = 20$.
2. il polinomio $(x - 1)^4$, $t = 0.02, n = 40$.
3. il polinomio i cui zeri sono $1, 2, 3, \ldots, 20$, $t = 0.05, n = 20$

Esercizio 2 (Polinomi di Legendre). I polinomi di Legendre sono definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = ((2n - 1)xp_{n-1}(x) - (n - 1)p_{n-2}(x))/n, \quad n \geq 3,$$

dove $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_n(x)$ è l'n-esimo polinomio di Legendre. Si disegni il grafico dei primi K polinomi di Legendre nll'intervallo $[-1, 1]$, dove $K > 1$ è un intero assegnato.

Per $K = 10$ dovreste ottenere la figura



Esercizio 3. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si osservi che i coefficienti delle potenze di grado dispari del polinomio $p(x)p(-x)$ sono nulli. Pertanto $p(x)p(-x)$ può essere visto come un polinomio di grado ancora n valutato in x^2. È dunque possibile generare una successione $\{p_i(x)\}_i$ di polinomi di grado n mediante la formula ricorsiva :

$$p_{i+1}(x^2) = p_i(x)p_i(-x)/r_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

dove r_i è il coefficiente di modulo massimo di $p_i(x)p_i(-x)$, e $p_0(x) = p(x)$. In altre parole, a meno della divisione per r_i, i coefficienti di $p_{i+1}(x)$ sono i coefficienti delle potenze pari di $p_i(x)p_i(-x)$. La divisione per r_i ha lo scopo di non far divergere i coefficienti dei polinomi.

1. Si scriva una function che genera i vettori di dimensione $n+1$ che definiscono i coefficienti dei polinomi $p_i(x)$, per $i = 1, ..., K$, dove $K > 1$ è un intero fissato.

2. Si osservi la successione di polinomi nei seguenti casi:

   (a) $p(x)$ con zeri $0.1, -0.7, 10, -2.9, 6.934, 0.76, -29$

   (b) $p(x)$ con zeri $11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5$

   (c) $p(x)$ con zeri $11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 6$

   (d) $p(x)$ con zeri $-1, 2, 0.7, 3, 5$

   (e) $p(x)$ con zeri $1, -1, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5$

   La successione di polinomi è convergente? Se converge, a che cosa converge?

2 Fitting di dati

Assegnati i vettori `x` e `y` di dimensione `m`, e l'intero positivo `n`, l'istruzione `p=polyfit(x,y,n)` calcola i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado al più `n` tale che $p($`x(i)`$)\approx$`y(i)`, per `i=1,...,m`, nel senso dei minimi quadrati. Cioè:

1. se $n \geq m$, $p(x)$ è il polinomio che interpola i punti `(x(i), y(i))`.

2. se $n < m$, $p(x)$ è il polinomio che minimizza

$$(p(\texttt{x(1)}) - \texttt{y(1)})^2 + (p(\texttt{x(2)}) - \texttt{y(2)})^2 + ... + (p(\texttt{x(m)}) - \texttt{y(m)})^2.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x) = 1/(x + (1-x)^2)$ sull'intervallo $[-2, 2]$. Si valuti la funzione $f(x)$ in 20 punti equispaziati x_i, $i = 1, \ldots, 20$, dell'intervallo $[-2, 2]$ e si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado 3 tale che $p(x_i) \approx f(x_i)$, nel senso dei minimi quadrati. Si tracci il grafico della funzione $f(x)$ e del polinomio $p(x)$. Provare ad aumentare il grado del polinomio.

Esercizio 5. Stesso problema dell'esercizio precedente, ma utilizzare la function `spline` invece che `polyfit`.