Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 3 - 30/3/2011

1 Il segno di un numero complesso

Dato il numero complesso z non immaginario puro, definiamo

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \text{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

Il segno si può ottenere mediante le istruzioni `sign` e `real`:

```
octave:1> z=4*exp(i*6);
octave:2> s=sign(real(z))
s =  1
octave:3> z
z =  3.8407 - 1.1177i
```

Si può dimostrare che il segno del numero complesso z è il limite della successione $\{x_k\}_k$ definita come:

$$\begin{aligned} x_1 &= z, \\ x_{k+1} &= \frac{x_k + x_k^{-1}}{2}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 1. Si scriva la function `s = segno(z, maxiter, eps)` che prende come input il numero complesso `z`, l'intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`. Calcola gli elementi della successione $\{x_k\}_k$ fino quando si verifica una delle seguenti condizioni: $k =$`maxiter` o $|x_{k+1} - x_k| <$ `eps`. Restituisce in output `s`, che è l'ultimo elemento calcolato della successione.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:7> format long e
octave:8>  s=segno(z,10,1.e-10)
s = 1.00000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
```

Modificare la `function` in modo che restituisca in output anche il numero `n` di elementi della successione che ha calcolato, e stampi sullo schermo $diff = |x_{k+1} - x_k|$ per ogni valore di k. Dovreste ottenere:

```
octave:9>  [s, n]=segno(z,10,1.e-10)
diff =  1.89570515129166e+00
diff =  8.52981983439299e-01
```

```
diff =  2.87253153593710e-01
diff =  4.06288977017036e-02
diff =  8.25840924536849e-04
diff =  3.41006613825517e-07
diff =  5.81182570394288e-14
s = 1.00000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
n =  7
```

Che cosa si osserva? Che tipo di convergenza è?

Scegliere un numero complesso con parte reale piccola, ad esempio 10^{-2}. Quante iterazioni servono per avere una differenza più piccola ad esempio di 10^{-12}?

Che cosa succede se scelgo come z un numero immaginario puro?

2 Le immagini in octave

Octave rappresenta le immagini mediante una matrice A di interi dimensione $p \times q$, associando all'elemento (i, j) della matrice A un colore opportuno. Più precisamente, se $a_{i,j} = k$, il colore dell'elemento (i, j) è quello definito dalla $k-$esima riga della matrice `colormap`. La matrice `colormap` è una matrice 64×3 , con elementi compresi tra 0 e 1, dove ciascuna riga rappresenta un colore mediante una terna (r, g, b) che definisce la quantità di rosso, verde e blu.

```
octave:24> format short
octave:25> size(colormap)
ans =

   64    3

octave:26> colormap
ans =

   0.00000   0.00000   0.50000
   0.00000   0.00000   0.56349
   0.00000   0.00000   0.62698
   0.00000   0.00000   0.69048
   0.00000   0.00000   0.75397
   0.00000   0.00000   0.81746
   0.00000   0.00000   0.88095
   0.00000   0.00000   0.94444
   0.00000   0.00794   1.00000
lines 1-9
```

Se A è una matrice $p \times q$ con elementi interi compresi tra 1 e 64, il comando `image(A)` produce un'immagine $p \times q$, il cui elemento (i,j) è rappresentato dal colore sulla riga di indice $a_{i,j}$ della matrice `colormap`. Ad esempio:

```
octave:28> A=zeros(64*5, 64*3);
octave:29> for k=1:64, A(5*k-4: 5*k,  : ) = k; end
octave:30> image(A)
```

La `colormap` può essere modificata, ad esempio:

```
octave:31> colormap( ocean(64) );
```

Per ripristinare quella di default:

```
octave:33> colormap( "default" );
```

Si modifichi a piacere la matrice A e si disegni l'immagine corrispondente. Se gli elementi della matrice A non sono interi compresi tra 1 e il numero di righe della `colormap`, conviene usare l'istruzione `imagesc(A)`, che costruisce l'immagine riscalando opportunamente gli elementi della matrice A (si veda l'help).

3 Convergenza della successione "segno"

Vogliamo ora disegnare i bacini di attrazione della successione $\{x_k\}_k$ nel rettangolo del piano complesso $[a, b] \times [ic, id]$, dove $[a, b]$, $[c, d]$ sono intervalli della retta reale.

Esercizio 2. Si scriva una function `bsegno( a, b, c, d, maxiter, eps)` che:

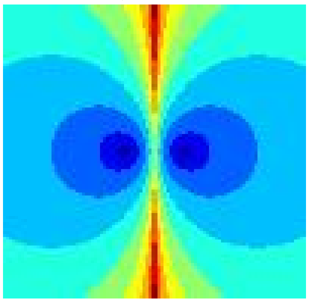
1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli $[a, b]$, $[c, d]$,il numero intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;

2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli piccoli, ad esempio mediante il comando `x=linspace(a,b,100)`, `y=linspace(c,d,100)`;

3. costruisce la matrice `iter` di dimensione `length(x) x length(y)` tale che l'elemento `(h,k)` di `iter` è il numero di elementi della successione calcolati con la function `segno`, a partire da `z=x(h) + i*y(k)`;

4. disegna i bacini di attrazione mediante il comando `imagesc(x, y, iter)`

Assegnare un valore ad a,b,c,d, maxiter e eps, ad esempio `a=c=-5, b=d=5, eps = 1.e-8, maxiter = 20`. Dovreste ottenere un'immagine del tipo



Provare con altri valori.

4 L'insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è definito come l'insieme dei punti s del piano complesso tali che la successione $\{z_n\}_n$ è limitata, dove

$$\begin{aligned} z_1 &= s, \\ z_{n+1} &= z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

In particolare il punto $s = 0$ appartiene all'insieme di Mandelbrot. Si vuole disegnare l'insieme di Mandelbrot sul piano complesso:

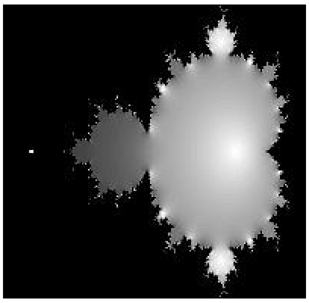
Esercizio 3. Si scriva una function `W = mandel (a, b, c, d, K)` che:

1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli `[a,b]`, `[c,d]` e il numero intero positivo `K`;
2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli "piccoli", assegnando ad esempio alle variabili `x` e `y` le discretizzazioni degli intervalli `[a,b]` e `[c,d]`, rispettivamente;
3. costruisce la matrice `W` tale che l'elemento `(h,k)` di `W` è il `K`-esimo elemento della successione $\{z_n\}_n$, ottenuto con s =`x(h)+i*y(k)`;
4. disegna l'immagine della matrice `exp(-abs(W'))` mediante il comando `imagesc`, e restituisce in output `W`.

Attenzione: per certi valori di s la successione $\{z_n\}_n$ diverge molto velocemente, per cui il valore calcolato di z_K risulta essere `NaN` (Not a Number). Quindi, al punto 3, inserire un controllo sulla grandezza del modulo di z_n, per n=1,...,K: ad esempio, se il modulo è maggiore di `1.e16`, si interrompe l'iterazione e si assegna a `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato.

Il comando

```
octave:1> W=mandel(-2,0.6,-1,1,20);
```

dovrebbe produrre la figura 

Fare degli "zoom" provando con altri valori di `a,b,c,d`.

5 Altri insiemi di Mandelbrot

Si consideri ora la successione $\{z_n\}_n$ definita come

$$\begin{aligned} z_1 &= s, \\ z_{n+1} &= z_n^p + s, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

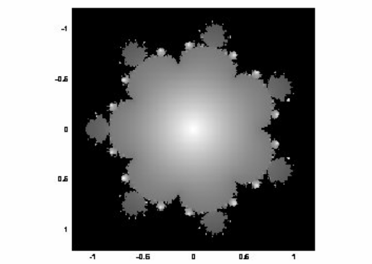
dove s è un numero complesso fissato, e p è un intero maggiore di 1 fissato.

Esercizio 4. Si fissi p e, come nell'esercizio precedente, si disegni l'insieme dei punti s del piano complesso tali che la successione è limitata. Per far questo si definisca la function `W = mandelp(a,b,c,d,p,K)` in modo analogo all'Esercizio 1. Si provino diversi valori di p.

Il comando

```
octave:5> W=mandelp(-1.2,1.2,-1.2,1.2,8,20);
```

dovrebbe produrre l'immagine



6 Insiemi di Julia

Sia s un numero complesso fissato e si consideri la successione $\{z_n\}_n$ definita come:

$$\begin{aligned} &z_1 \quad \text{numero complesso fissato in modo abritrario} \\ &z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Vogliamo disegnare i bacini di attrazione della successione, al variare di z_1 scelto in un rettangolo `[a,b] x i [c, d]` del piano complesso.

Esercizio 5. Si scriva una function `W=julia(a, b, c, d, s, K)` che disegni i bacini di attrazione della successione, al variare di z_1 nel rettangolo del piano complesso `[a,b] x i [c, d]`, dove `a,b,c,d` sono reali:

1. si suddividano gli intervalli [a,b] e [c,d] in sottointervalli piccoli, ottenendo una griglia del rettangolo [a,b] x i [c, d];

2. per ciascun punto `x(h)+i*y(k)` della griglia: si calcolino gli elementi della successione z_n , per n=2,...,K, ottenuti con z_1 = `x(h)+i*y(k)` (come negli esercizi precedenti, si interrompa il calcolo se $|z_n|$ è "troppo grande"); si definisca `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato della successione;

3. si disegni la figura definita da `W`

Scegliendo [a,b]=[-1.5, 1.5], [c, d] = [-1.5, 1.5], s = 0.27334 - 0.00742 i , k=20, dovreste ottenere l'immagine