

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 2 - 23/3/2011

## 1 La successione di Collatz

Sia  $n$  un numero intero positivo fissato. La successione di Collatz è la successione  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  di numeri interi definita nel seguente modo:

$$a_1 = n,$$
$$\text{per } k \geq 1, \quad a_{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_k = 1 \\ a_k/2 & \text{se } a_k \text{ pari} \\ 3a_k + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La congettura di Collatz afferma che, comunque si scelga  $n$ , esiste sempre un intero  $h$  tale che  $a_h = 1$ .

*Esercizio 1.* Si definisca in un file la function `a = collatz(n)` che prende in input  $n$  e dà in output il vettore  $a$ , che contiene i primi  $h$  elementi della successione  $\{a_k\}_k$ , dove  $h$  è minimo intero tale che  $a_h = 1$ . *Suggerimenti:* Utilizzare i comandi `while`, `if`, `rem`.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:1> a= collatz(3)
a =
    3   10    5   16    8    4    2    1

octave:2> a = collatz(1)
a = 1
octave:3> a = collatz(10)
a =
   10    5   16    8    4    2    1

octave:4> a = collatz(7)
a =
    7   22   11   34   17   52   26   13   40   20   10    5   16    8    4
    2    1
```

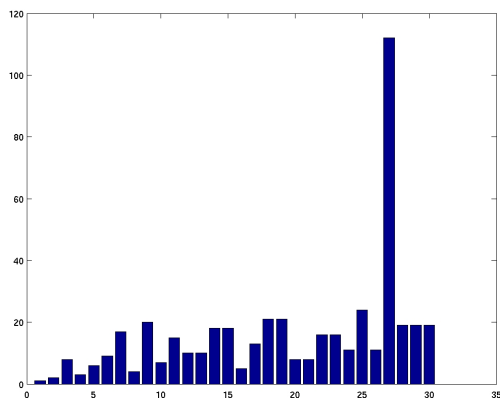
Fare `close all, plot(a, '-')`, `title([ ' n = ' num2str(a(1)) ])`; per diversi valori di  $n$ .

*Esercizio 2.* Utilizzando la function `collatz` si scriva la function `u = collatz_count(m)` che prende come input il numero intero positivo  $m$ , e restituisce in output il vettore  $u$  di dimensione  $m$ , tale che  $u_j$  è il numero di elementi del vettore  $a = \text{collatz}(j)$ , per  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Si fissi  $m$  e si dia il comando `bar(u)`. Ad esempio

```
octave:5> close all
octave:6> u=collatz_count(30);
octave:7> bar(u)
```

Dovreste ottenere la figura



Si provi con altri valori di  $m$ .

## 2 Successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci è la successione  $\{f_n\}_n$  definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, & f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, & n &\geq 3 \end{aligned}$$

*Esercizio 3.* Si scriva in un file la function `f=fibonacci(m)` che, preso in input il numero intero positivo  $m$ , restituisce in output il vettore  $f$  che contiene i primi  $m$  elementi della successione  $\{f_n\}_n$ .

Si calcoli e si disegni il rapporto  $f_{n+1}/f_n$  per  $n = 1, \dots, m$ , con  $m$  abbastanza grande (ma non troppo, per evitare overflow). Ad esempio:

```
octave:20> m=50;
octave:21> f=fibonacci(50);
octave:22> r=f(2:m)./f(1:m-1);
octave:23> plot(r)
octave:24> r(end)
ans = 1.6180
octave:25> format long e
octave:26> r(end)
ans = 1.61803398874989e+00
```

Si provi ora questo giochetto: si scelga un reale positivo  $x$ , ad esempio  $x = 10$ , e si sostituisca alla variabile  $x$  il valore  $(1+x)^{1/2}$  per “tante volte”. Questo si fa

eseguendo successivamente il comando  $x = \text{sqrt}(1+x)$ , che possiamo richiamare con la freccia in alto:

```
octave:38> x=10;
octave:39> x=sqrt(1+x)
x = 3.31662479035540e+00
octave:40> x=sqrt(1+x)
x = 2.07764886117828e+00
octave:41> x=sqrt(1+x)
x = 1.75432290675870e+00
octave:42> x=sqrt(1+x)
x = 1.65961528878192e+00
octave:43> x=sqrt(1+x)
x = 1.63083269797423e+00
octave:44> x=sqrt(1+x)
x = 1.62198418548833e+00
octave:45> x=sqrt(1+x)
x = 1.61925420656805e+00
octave:46> x=sqrt(1+x)
x = 1.61841101286665e+00
octave:47> x=sqrt(1+x)
x = 1.61815049141501e+00
octave:48> x=sqrt(1+x)
x = 1.61806998965280e+00
octave:49> x=sqrt(1+x)
x = 1.61804511360246e+00
octave:50> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803742651475e+00
octave:51> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803505107731e+00
octave:52> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803431702709e+00
octave:53> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803409019312e+00
octave:54> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803402009758e+00
octave:55> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803399843686e+00
octave:56> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803399174333e+00
octave:57> x=sqrt(1+x)
x = 1.61803398967492e+00
```

Confrontate  $x$  con  $r(\text{end})$ . Utilizzando il comando `help roots` guardate il funzionamento dell'istruzione `roots`.

Dare i comandi

```
octave:58> z=roots([1 -1 -1])
z =
-6.18033988749895e-01
1.61803398874989e+00
octave:59> q=max(z)
q = 1.61803398874989e+00
```

Che cosa rappresenta il vettore  $[1 \ -1 \ -1]$ ? Come è legato alla successione di Fibonacci e alla funzione  $x \rightarrow (1+x)^{1/2}$ ? Perché  $q$  è “vicino” a  $x$  e a  $r(end)$ ?

Disegnare in scala semilogaritmica (utilizzando il comando `semilogy`) i primi  $m$  termini della successione di fibonacci e della successione  $\{q^n\}$ :

```
octave:70> semilogy(f,"r-;Fibonacci;")
octave:71> hold on
octave:72> semilogy(q.^[1:m],"g-;Exp;")
octave:73> hold off
```

Perché si ottengono due rette? Perché sono parallele?

*Esercizio 4.* Si consideri la successione  $\{g_n\}_n$  definita nel seguente modo

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = 2$$

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-3}, \quad n \geq 4$$

Lavorando come per la successione di Fibonacci, si determini  $\rho$  tale che  $g_n \approx \sigma \rho^n$ .

### 3 Successione di Fibonacci “randomizzata”

La successione di Fibonacci randomizzata è così definita:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + p_n \cdot f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

dove, per ogni intero  $n$ ,  $p_n$  vale 1 con probabilità  $1/2$ , vale -1 con probabilità  $1/2$ .

*Esercizio 5.* Si scriva la function `rf = rffibonacci(m)` che, preso in input il numero intero positivo  $m$ , dia in output il vettore `rf` che contiene i primi  $m$  elementi della successione  $\{f_n\}$ . Per calcolare  $p_n$  si possono utilizzare le funzioni `sign` e `rand`.

È stato dimostrato da D. Viswanath (Random Fibonacci sequences and the number  $c=1.13198824$ . Math. Comp., 69:1131–1155, 2000) che, con probabilità 1, la successione  $\{f_n\}_n$  cresce come  $c^n$  dove  $c=1.13198824\dots$ . Visualizzare graficamente questa proprietà.