Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 9 - 12/5/2010

1 Problemi ai valori iniziali

Ci poniamo il problema di calcolare la soluzione $x(t)$ (assumendo che esista e sia unica) del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t), \quad t \in [a, b] \\ x(a) = c \end{cases}$$

dove $f(x, t) : R^m \times R \to R^m$ è una funzione assegnata e c è un vettore di dimensione m assegnato.

La funzione `lsode` approssima la soluzione $x(t)$ in un numero finito di punti dell'intervallo $[a, b]$. L'utilizzo più semplice procede secondo i seguenti passi (si veda anche l'help):

1. Definire una function `z=miaf(x,t)` che calcola $z = f(x, t)$, dove $f(x, t)$ è la funzione che definisce l'equazione differenziale $x'(t) = f(x(t), t)$

2. Definire un vettore `T` che contiene una discretizzazione dell'intervallo $[a, b]$, ad esempio `T=linspace(a,b,50)`.

3. Definire un vettore `c` che contiene $x(a)$.

4. Eseguire il comando `x = lsode ( ''miaf'', c, T )`. In output la variabile `x` contiene l'approssimazione della soluzione $x(t)$ calcolata negli elementi del vettore `T`.

Per esempio, per risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ x_2'(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

definisco la `function`

```
function z=esempio(x,t)
  z = [ x(2); -x(1)];
endfunction
```

ed eseguo i comandi

```
octave:2> T=linspace(0,2*pi,50);
octave:3> c=[ 1; 0];
octave:4> x=lsode("esempio",c,T);
```

La variabile `x`, di dimensione 50×2, contiene nella prima colonna le approssimazioni di $x_1(t)$ e nella seconda colonna le approssimazioni di $x_2(t)$.

La soluzione del problema è $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = -\sin(t)$. Questo si può verificare:

```
octave:12> err=max(abs((x-[cos(T)',-sin(T)'])))
err =

   1.1088e-06   8.6331e-07
```

Per visualizzare la soluzione si possono dare i comandi

```
octave:13> plot(x(:,1),x(:,2))
octave:14> axis("square")
```

e

```
octave:15> plot(T,x(:,1),T,x(:,2))
```

Esercizio 1. Si risolva il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^3(t), \quad t \in [0,8] \\ x_2'(t) = -x_1^3(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Si disegni il grafico di $x_1(t)$, di $x_2(t)$ e la curva $(x_1(t), x_2(t))$. Si facciano le stesse cose per il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^5(t), \quad t \in [0,8] \\ x_2'(t) = -x_1^5(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Cosa succede per l'equazione $x_1'(t) = x_2^2(t)$, $x_2'(t) = -x_1^2(t)$?

Esercizio 2. L'equazione del pendolo semplice ha la forma

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo formato dall'asta del pendolo con la verticale.

1. Si riscriva l'equazione del pendolo in una equazione del tipo $x'(t) = f(x(t), t)$, dove $f(x,t) : R^2 \times R \to R^2$.

2. Si approssimi la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0, \quad t \in [0,10] \\ \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$$

   mediante la funzione `lsode`, e si disegni il grafico di $\theta(t)$; si modifichino a piacere le condizioni iniziali e l'intervallo.

3. Nel caso di moto smorzato del pendolo, l'equazione diventa

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) + s\theta'(t) = 0$$

dove s è una costante positiva che dipende dalle caratteristiche del pendolo e dalla forza smorzante. Si risolva il problema ai valori iniziali, assegnando un valore a s e alle condizioni iniziali, e si disegni il grafico di $\theta(t)$.

Esercizio 3 (Attrattore di Lorenz). Si risolva il seguente problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = 10(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = 28x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \quad t \in [0, 50] \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - 8x_3(t)/3 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

suddividendo l'intervallo $[0, 50]$ in 1000 punti. Si disegni la curva $(x_1(t), x_3(t))$, $t \in [0, 100]$.