

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 7 - 28/4/2010

## 1 Polinomi

I polinomi in Octave sono definiti mediante il vettore dei loro coefficienti: se  $\mathbf{p}$  è un array di dimensione  $1 \times m$ , esso identifica il seguente polinomio nella variabile  $x$  di grado al più  $m - 1$

$$\mathbf{p}(1)x^{m-1} + \mathbf{p}(2)x^{m-2} + \dots + \mathbf{p}(m-1)x + \mathbf{p}(m).$$

Le funzioni `poly`, `roots`, `polyval`, `polyvalm`, `polyder`, `conv`, `deconv` permettono di eseguire facilmente alcune operazioni con e sui polinomi.

Ad esempio, calcoliamo gli zeri del polinomio  $p(x) = x^2 - x - 1$ :

```
octave:3> p=[1 -1 -1];  
octave:4> z=roots(p)  
z =
```

```
-0.61803  
1.61803
```

Verifichiamo che quelli calcolati siano gli zeri:

```
octave:5> polyval(p,z)  
ans =
```

```
-1.1102e-16  
2.2204e-16
```

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico  $p(x)$ . Verifichiamolo utilizzando l'istruzione `poly`:

```
octave:9> A=[0 1; 1 1];  
octave:10> pc=poly(A)  
pc =
```

```
1.0000 -1.0000 -1.0000
```

Secondo il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio caratteristico calcolato in  $A$  vale zero. Verifichiamolo:

```
octave:11> polyvalm(pc,A)
ans =
    9.2057e-17    1.4895e-16
    1.4895e-16    2.4101e-16
```

I polinomi possono essere moltiplicati e divisi mediante le istruzioni `conv` e `deconv`. Ad esempio dividiamo il polinomio  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  per  $x - 2$ , e poi ricostruiamo il polinomio iniziale:

```
octave:12> g=[1 -6 12 -8];
octave:13> h=[1 -2];
octave:14> [q,r]=deconv(g,h)
q =
     1    -4     4
r =
     0     0     0     0
octave:15> conv(h,q)
ans =
     1    -6    12    -8
```

*Esercizio 1.* Si scriva una function che, preso come input un vettore  $\mathbf{p}$  con i coefficienti di un polinomio, un numero reale  $t$ , e un numero intero  $n$ , disegna sul piano complesso gli zeri dei polinomi ottenuti sommando  $\mathbf{h} \cdot t$  al coefficiente costante del polinomio iniziale, per  $\mathbf{h}=0, \dots, n$ . Si provino i seguenti esempi:

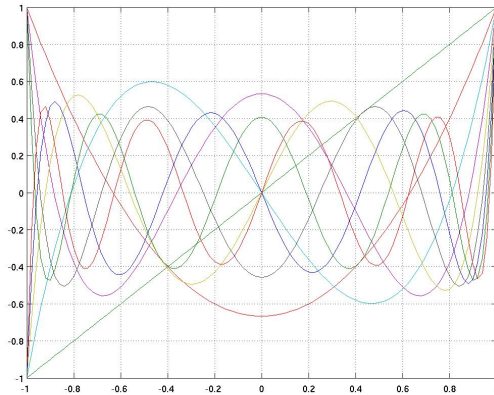
1. il polinomio  $x^4 - 1$ ,  $t = 0.05$ ,  $n = 20$ .
2. il polinomio  $(x - 1)^4$ ,  $t = 0.02$ ,  $n = 40$ .
3. il polinomio i cui zeri sono  $1, 2, 3, \dots, 20$ ,  $t = 0.05$ ,  $n = 20$

*Esercizio 2* (Polinomi di Legendre). I polinomi di Legendre sono definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = ((2n - 1)xp_{n-1}(x) - (n - 1)p_{n-2}(x))/n, \quad n \geq 3,$$

dove  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  e  $p_n(x)$  è l' $n$ -esimo polinomio di Legendre. Si disegni il grafico dei primi  $K$  polinomi di Legendre nell'intervallo  $[-1, 1]$ , dove  $K > 1$  è un intero assegnato.

Per  $K = 10$  dovrete ottenere la figura



**Esercizio 3.** Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si osservi che i coefficienti delle potenze di grado dispari del polinomio  $p(x)p(-x)$  sono nulli. Pertanto  $p(x)p(-x)$  può essere visto come un polinomio di grado ancora  $n$  valutato in  $x^2$ . È dunque possibile generare una successione  $\{p_i(x)\}_i$  di polinomi di grado  $n$  mediante la formula ricorsiva :

$$p_{i+1}(x^2) = p_i(x)p_i(-x)/r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

dove  $r_i$  è il coefficiente di modulo massimo di  $p_i(x)p_i(-x)$ , e  $p_0(x) = p(x)$ . In altre parole, a meno della divisione per  $r_i$ , i coefficienti di  $p_{i+1}(x)$  sono i coefficienti delle potenze pari di  $p_i(x)p_i(-x)$ . La divisione per  $r_i$  ha lo scopo di non far divergere i coefficienti dei polinomi.

1. Si scriva una function che genera i vettori di dimensione  $n + 1$  che definiscono i coefficienti dei polinomi  $p_i(x)$ , per  $i = 1, \dots, K$ , dove  $K > 1$  è un intero fissato.
2. Si osservi la successione di polinomi nei seguenti casi:
  - (a)  $p(x)$  con zeri 0.1, -0.7, 10, -2.9, 6.934, 0.76, -29
  - (b)  $p(x)$  con zeri 11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5
  - (c)  $p(x)$  con zeri 11, -7, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 6
  - (d)  $p(x)$  con zeri -1, 2, 0.7, 3, 5
  - (e)  $p(x)$  con zeri 1, -1, 0.01, -0.29, 0.69, 7.6, -0.2, 0.5

La successione di polinomi è convergente? Se converge, a che cosa converge?

## 2 Fitting di dati

Assegnati i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di dimensione  $m$ , e l'intero positivo  $n$ , l'istruzione `p=polyfit(x,y,n)` calcola i coefficienti del polinomio  $p(x)$  di grado al più  $n$  tale che  $p(\mathbf{x}(i)) \approx \mathbf{y}(i)$ , per  $i=1, \dots, m$ , nel senso dei minimi quadrati. Cioè:

1. se  $n \geq m$ ,  $p(x)$  è il polinomio che interpola i punti  $(\mathbf{x}(i), \mathbf{y}(i))$ .

2. se  $n < m$ ,  $p(x)$  è il polinomio che minimizza

$$(p(x(1)) - y(1))^2 + (p(x(2)) - y(2))^2 + \dots + (p(x(m)) - y(m))^2.$$

*Esercizio 4.* Si consideri la funzione  $f(x) = 1/(x + (1 - x)^2)$  sull'intervallo  $[-2, 2]$ . Si valuti la funzione  $f(x)$  in 20 punti equispaziati  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 20$ , dell'intervallo  $[-2, 2]$  e si calcolino i coefficienti del polinomio  $p(x)$  di grado 3 tale che  $p(x_i) \approx f(x_i)$ , nel senso dei minimi quadrati. Si tracci il grafico della funzione  $f(x)$  e del polinomio  $p(x)$ . Provare ad aumentare il grado del polinomio.

*Esercizio 5.* Stesso problema dell'esercizio precedente, ma utilizzare la function `spline` invece che `polyfit`.