Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 6 - 21/4/2010

1 Grafici di funzioni $R \times R \rightarrow R$

L'istruzione `[X, Y] =meshgrid(x, y)` prende in input i vettori `x` e `y` e restituisce in output le matrici `X` e `Y` tali che: le righe di `X` sono tutte uguali al vettore `x`, e le colonne di `Y` sono tutte uguali al vettore `y`:

```
octave:1> x=[1:5]
x =

   1   2   3   4   5

octave:2> y=[6:11]
y =

    6    7    8    9   10   11

octave:3> [X,Y]=meshgrid(x,y);
octave:4> X
X =

   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5
   1   2   3   4   5

octave:5> Y
Y =

    6    6    6    6    6
    7    7    7    7    7
    8    8    8    8    8
    9    9    9    9    9
   10   10   10   10   10
   11   11   11   11   11
```

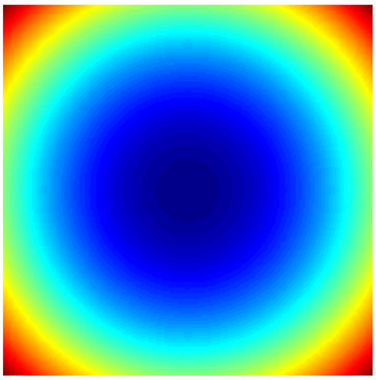
Se `x` contiene una "discretizzazione" dell'intervallo $[a\ b]$ sull'asse delle ascisse, e se `y` contiene una discretizzazione dell'intervallo $[c\ d]$ sull'asse delle ordinate, l'istruzione `[X, Y] =meshgrid(x, y)` permette di rappresentare i punti della griglia corrispondente nel rettandolo $[a\ b] \times [c\ d]$: l'elemento di coordinate

(`X(i,j),Y(i,j)`) è il generico punto di indici i, j sulla griglia. In pratica, l'istruzione `meshgrid` permette di valutare una funzione $f(x, y)$ definita su R^2 in una griglia di punti senza utilizzare alcun `for`.

Ad esempio i comandi

```
octave:6> x=-0.5:0.005:.5;
octave:7> y=x;
octave:8> [X,Y]=meshgrid(x,y);
octave:9> A=X.^2+Y.^2;
octave:10> imagesc(A);
```

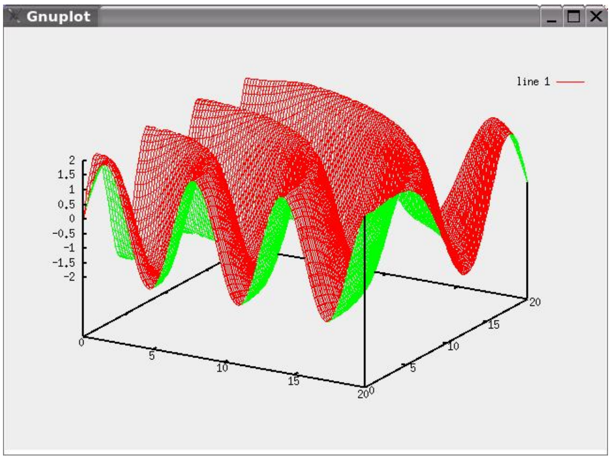
valutano la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nei punti di una griglia nel rettangolo $[-0.5\ 0.5] \times [-0.5\ 0.5]$ e producono l'immagine



Esercizio 1. Utilizzando le function `meshgrid` e `mesh` (si veda l'help!) si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = 2\sin((x^2 + y^2)^{1/2})$, $(x, y) \in [0\ 20] \times [0\ 20]$
2. $f(x, y) = (x^2/2 + y^2/3)/2$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
3. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
4. $f(x, y) = xe^{-(x-y^2)^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a\ a] \times [-b\ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere.

Per la prima funzione dovreste ottenere la figura



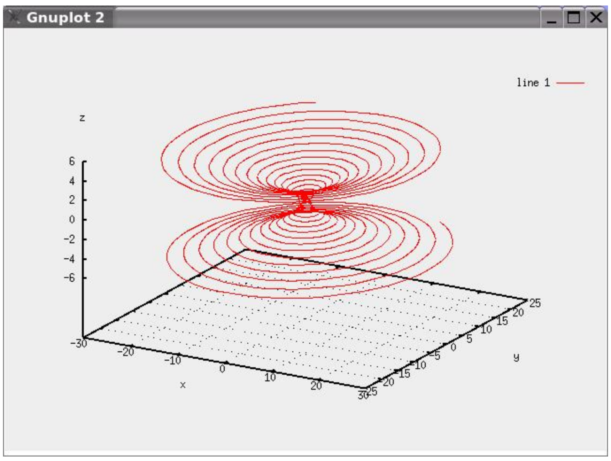
2 Curve parametriche

Le seguenti equazioni parametrizzano una curva in R^3 di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1+t^2)\sin(20t), \\ y(t) &= (1+t^2)\cos(20t), \\ z(t) &= t, \quad t \in [-5, 5]. \end{aligned}$$

La curva può essere disegnata con i seguenti comandi

```
octave:17> t=[-5:0.01:5];
octave:18> x=(1+t.^2).*cos(20*t);
octave:19> y=(1+t.^2).*sin(20*t);
octave:20> z=t;
octave:21> gset parametric
octave:22> W=[x;y;z]';
octave:23> gsplot(W)
```

che producono l'immagine 

Esercizio 2. 1. Disegnare una molla.

2. Disegnare le curve $(x(t), y(t), z(t))$ dove:

(a) $x(t) = (2 + \cos(1.5t))\cos(t)$, $y(t) = (2 + \cos(1.5t))\sin(t)$, $z(t) = 2\sin(1.5t)$, con $t \in [0, 4\pi]$.

(b) $x(t) = (4+\sin(20t))\cos(t)$, $y(t) = (4+\sin(20t))\sin(t)$, $z(t) = \cos(20t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

(c) $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, con $t \in [-2, 2]$.

(d) $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(2t)$, $z(t) = \sin(3t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

3 Superfici parametriche

Vogliamo disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(r,t) &= r\cos(t) \\ y(r,t) &= r\sin(t) \\ z(r,t) &= r, \end{aligned}$$

dove $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$. Per far questo diamo i comandi:

```
octave:1> r=linspace(0,1,30);
octave:2> t=linspace(0,2*pi,30);
octave:3> [R,T]=meshgrid(r,t);
octave:4> x=R.*cos(T);
octave:5> y=R.*sin(T);
octave:6> z=R;
octave:7> mesh(x,y,z)
```

Perché otteniamo un cono? Provare a usare il comando `surf` (veder l'help), poi `shading interp` e `axis off`.

Esercizio 3. Disegnare una sfera. Dare il comando `axis(''equal'')` per avere stesse proporzioni sui tre assi coordinati.

Esercizio 4. Disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2(1 - e^{u/(6\pi)})\cos(u)\cos^2(v/2) \\ y(u,v) &= 2(-1 + e^{u/(6\pi)})\sin(u)\cos^2(v/2) \\ z(u,v) &= 1 - e^{u/(3\pi)} - \sin(v) + e^{u/(6\pi)}\sin(v), \end{aligned}$$

dove $u \in [0, 6\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Ottenete una conchiglia?

La striscia di Moebius è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos(u) + v\cos(u/2)\cos(u) \\ y(u,v) &= \sin(u) + v\cos(u/2)\sin(u) \\ z(u,v) &= v\sin(u/2), \end{aligned}$$

con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-0.4, 0.4]$.

Esercizio 5. Disegnare la striscia di Moebius.

Cercate sul web le definizioni delle superfici parametriche “Klein bottle”, “Enneper's surface”, “Ellipsoid”, “Hyperboloid of two sheets”, “Lissajous surface”, “Whitney umbrella”, “Steiner surface”, e disegnatele.