

Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 5 - 14/4/2010

1 Il frattale *fern* (felce)

Il frattale *fern* si ottiene generando e disegnando una successione (potenzialmente infinita) di punti casuali sul piano.

Il frattale è generato applicando successivamente trasformazioni affini del tipo

$$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dove \mathbf{x} è un vettore di due componenti che rappresenta un punto nel piano, A e \mathbf{b} sono una matrice 2×2 e un vettore di dimensione 2 assegnati.

Ci sono quattro differenti trasformazioni affini, che vengono scelte con probabilità diversa. La trasformazione scelta con maggiore probabilità è definita da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Questa trasformazione ruota e “accorcia” un poco \mathbf{x} , e aggiunge 1.6 alla seconda componente. L'applicazione ripetuta di questa trasformazione muove un punto in alto e verso destra, costruendo la punta della foglia.

Le altre tre trasformazioni che vengono scelte con probabilità minore spostano il punto sulla foglia in basso a destra, o sulla foglia in basso a sinistra, o sul gambo. Queste sono ottenute con le tre coppie matrice/vettore:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Più precisamente, dato il vettore $\mathbf{p} = [0.85 \ 0.92 \ 0.99 \ 1]^T$ la successione di punti $\{\mathbf{x}_k\}_k$ del piano è generata nel seguente modo. Si pone $\mathbf{x}_1 = [0.5 \ 0.5]^T$, e per $k = 1, 2, \dots$:

- si sceglie casualmente, con distribuzione uniforme, un numero reale r compreso tra 0 e 1. Se $r \leq p_1$ si pone $i = 1$, se $p_1 < r \leq p_2$ si pone $i = 2$, se $p_2 < r \leq p_3$ si pone $i = 3$, altrimenti si pone $i = 4$;
- si definisce $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$.

Esercizio 1. Si scriva una function `fern(m)` che disegna sul piano i punti rappresentati dai vettori \mathbf{x}_k , per $k = 1, \dots, m$. *Suggerimenti:*

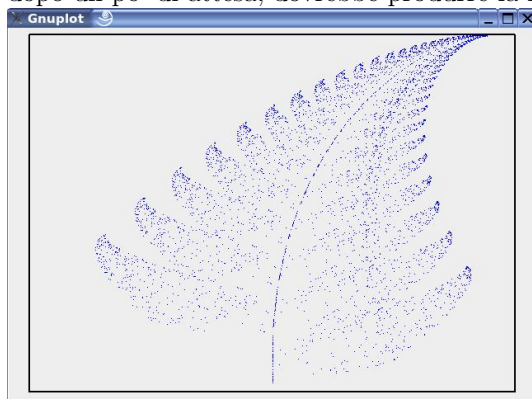
- per generare il numero casuale r utilizzare la funzione `rand`;
- non memorizzare tutti gli elementi della successioni, e disegnarli quando vengono calcolati (ad esempio mediante il comando `plot(x(1), x(2), 'r')`, se \mathbf{x} è l'ultimo elemento calcolato;
- ricordarsi di dare i comandi `hold off`, `close all` all'inizio della function per chiudere eventuali finestre grafiche già aperte, seguito dal comando `hold on`;
- prima di iniziare il processo iterativo, dare i comandi `axis([-3 3 0 10])` per fissare il range delle ascisse e delle ordinate, `axis(off)` per rimuovere gli assi cartesiani

Provare con diversi valori di m (per testare il funzionamento della function provare con m non troppo grande).

Il comando

```
octave:1> fern(5000);
```

dopo un po' di attesa, dovrebbe produrre la figura



Provare a modificare il vettore p , e l'elemento non zero della matrice A_4 . Come cambia la figura?

2 Il triangolo di Sierpinski

Generalizziamo l'iterazione che genera il frattale *fern*. Sia n un intero maggiore di 1 e siano A_1, \dots, A_n matrici reali 2×2 assegnate, e siano $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ vettori di dimensione 2 assegnati. Supponiamo che le matrici A_i e i vettori \mathbf{b}_i , $i = 1, \dots, n$, siano memorizzati nella matrice C , di dimensione $(2n) \times 3$, definita nel modo seguente:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. Si scriva una function `fract(C, m)` che disegni i punti sul piano generati come descritto di seguito:

- si costruisce il vettore `dets` di dimensione n tale che la componente j di `dets` contiene il modulo di $\det(A_j)$ (per calcolare il determinante si usi il comando `det`);
- si modifica il vettore `dets` nel modo seguente:
`dets = max(dets, max(dets)/(25*n));`
`dets = dets/sum(dets);`
- si crea il vettore `p` di dimensione n con componenti
 $0, \text{dets}(1), \text{dets}(1)+\text{dets}(2), \dots, \text{dets}(1)+\dots+\text{dets}(n-1)$
- si disegna sul piano il punto le cui coordinate sono gli elementi del vettore \mathbf{x}_k , per $k=20+1, 20+2, \dots, 20+m$, dove la successione $\{\mathbf{x}_k\}$ è definita nel seguente modo:
 1. \mathbf{x}_1 è scelto in modo casuale
 2. per $k = 1, 2, \dots$ si sceglie un numero casuale r compreso tra 0 e 1, si pone $i=\text{sum}(\mathbf{p}<\mathbf{r})$ e si definisce $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$.

Si provi la function con le seguenti matrici:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ s & -x & t \\ x & s & 0 \\ s & x & 0.5 \\ -x & s & x \\ t & 0 & t_2 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

dove $x = \frac{1}{3} \sin(\pi/3)$, $s = 1/6$, $t = 1/3$, $t_2 = 2/3$.

Con la matrice S dovrete ottenere il triangolo di Sierpinski

