Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 2 - 10/3/2010

1 La successione di Collatz

Sia n un numero intero positivo fissato. La successione di Collatz è la successione $\{a_k\}_{k\geq 1}$ di numeri interi definita nel seguente modo:

$$a_1 = n,$$
$$\text{per} \quad k \geq 1, \quad a_{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; a_k = 1 \\ a_k/2 & \text{se} \;\; a_k \;\; \text{pari} \\ 3a_k + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La congettura di Collatz afferma che, comunque si scelga n, esiste sempre un intero h tale che $a_h = 1$.

Esercizio 1. Si definisca in un file la function `a = collatz(n)` che prende in input n e dà in output il vettore a, che contiene i primi h elementi della successione $\{a_k\}_k$, dove h è minimo intero tale che $a_h = 1$. *Suggerimenti:* Utilizzare i comandi `while`, `if`, `rem`.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:1> a= collatz(3)
a =

   3   10    5   16    8    4    2    1

octave:2> a = collatz(1)
a = 1
octave:3> a = collatz(10)
a =

  10    5   16    8    4    2    1

octave:4> a = collatz(7)
a =

   7   22   11   34   17   52   26   13   40   20   10    5   16    8    4
2    1
```

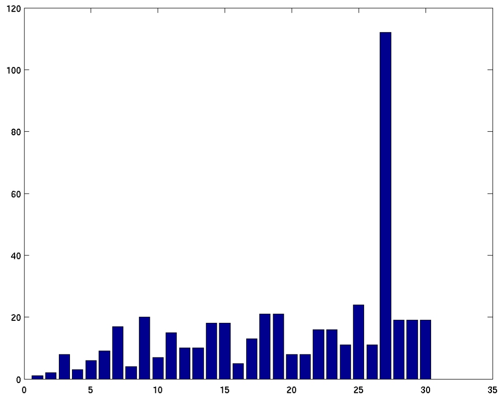
Fare `close all, plot(a,'.-'), title ( [ ' n = ' num2str( a ( 1 ) ) ] );` per diversi valori di n.

Esercizio 2. Utilizzando la function `collatz` si scriva la function `u = collatz_count (m)` che prende come input il numero intero positivo m, e restituisce in output il vettore u di dimensione m, tale che u_j è il numero di elementi del vettore `a= collatz(j)`, per $j = 1, 2, ..., m$.

Si fissi m e si dia il comando `bar(u)`. Ad esempio

```
octave:5> close all
octave:6> u=collatz_count(30);
octave:7> bar(u)
```

Dovreste ottenere la figura



Si provi con altri valori di m.

2 Successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci è la successione $\{f_n\}_n$ definita nel seguente modo

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Esercizio 3. Si scriva in un file la function `f=fibonacci (m)` che, preso in input il numero intero positivo `m`, resituisce in output il vettore `f` che contiene i primi m elementi della successione $\{f_n\}_n$.

Si calcoli e si disegni il rapporto f_{n+1}/f_n per $n = 1, \dots, m$, con m abbastanza grande (ma non troppo, per evitare overflow). Ad esempio:

```
octave:20> m=50;
octave:21> f=fibonacci(50);
octave:22> r=f(2:m)./f(1:m-1);
octave:23> plot(r)
octave:24> r(end)
ans = 1.6180
octave:25> format long e
octave:26> r(end)
ans =  1.61803398874989e+00
```

Si provi ora questo giochetto: si scelga un reale positivo x, ad esempio $x = 10$, e si sostituisca alla variabile x il valore $(1+x)^{1/2}$ per "tante volte". Questo si fa eseguendo successivamente il comando $x = sqrt(1+x)$, che possiamo richiamare con la freccia in alto:

```
octave:38> x=10;
octave:39> x=sqrt(1+x)
x =   3.31662479035540e+00
octave:40> x=sqrt(1+x)
x =   2.07764886117828e+00
octave:41> x=sqrt(1+x)
x =   1.75432290675870e+00
octave:42> x=sqrt(1+x)
x =   1.65961528878192e+00
octave:43> x=sqrt(1+x)
x =   1.63083269797423e+00
octave:44> x=sqrt(1+x)
x =   1.62198418548833e+00
octave:45> x=sqrt(1+x)
x =   1.61925420656805e+00
octave:46> x=sqrt(1+x)
x =   1.61841101286665e+00
octave:47> x=sqrt(1+x)
x =   1.61815049141501e+00
octave:48> x=sqrt(1+x)
x =   1.61806998965280e+00
octave:49> x=sqrt(1+x)
x =   1.61804511360246e+00
octave:50> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803742651475e+00
octave:51> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803505107731e+00
octave:52> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803431702709e+00
octave:53> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803409019312e+00
octave:54> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803402009758e+00
octave:55> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803399843686e+00
octave:56> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803399174333e+00
octave:57> x=sqrt(1+x)
x =   1.61803398967492e+00
```

Confrontate x con $r(end)$. Utilizzando il comando `help roots` guardate il funzionamento dell'istruzione `roots`.

Dare i comandi

```
octave:58> z=roots([1 -1 -1])
z =

  -6.18033988749895e-01
   1.61803398874989e+00

octave:59> q=max(z)
q =   1.61803398874989e+00
```

Che cosa rappresenta il vettore `[1 -1 -1]`? Come è legato alla successione di Fibonacci e alla funzione $x \to (1+x)^{1/2}$? Perché q è "vicino" a x e a $r(end)$?

Disegnare in scala semilogaritmica (utilizzando il comando `semilogy`) i primi m termini della successione di fibonacci e della successione $\{q^n\}$:

```
octave:70> semilogy(f,"r-;Fibonacci;")
octave:71> hold on
octave:72> semilogy(q.^[1:m],"g-;Exp;")
octave:73> hold off
```

Perché si ottengono due rette? Perché sono parallele?

Esercizio 4. Si consideri la successione $\{g_n\}_n$ definita nel seguente modo

$$\begin{aligned} &g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = 2 \\ &g_n = g_{n-1} + g_{n-3}, \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

Lavorando come per la successione di Fibonacci, si determini ρ tale che $g_n \approx \sigma\rho^n$.

3 Successione di Fibonacci "randomizzata"

La successione di Fibonacci randomizzata è così definita:

$$\begin{aligned} &f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \\ &f_n = f_{n-1} + p_n \cdot f_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

dove, per ogni intero n, p_n vale 1 con probabilità 1/2, vale -1 con probabilità 1/2.

Esercizio 5. Si scriva la function `rf = rfibonacci (m)` che, preso in input il numero intero positivo `m`, dia in output il vettore `rf` che contiene i primi m elementi della successione $\{f_n\}$. Per calcolare p_n si possono utilizzare le funzioni `sign` e `rand`.

È stato dimostrato da D. Viswanath (Random Fibonacci sequences and the number c=1.13198824. Math. Comp., 69:1131–1155, 2000) che, con probabilità 1, la successione $\{f_n\}_n$ cresce come c^n dove c=1.13198824.... Visualizzare graficamente questa proprietà.