Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 4 - 25/3/2009

1 L'insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è definito come l'insieme dei punti s del piano complesso tali che la successione $\{z_n\}_n$ è limitata, dove

$$\begin{aligned} z_1 &= s, \\ z_{n+1} &= z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

In particolare il punto $s = 0$ appartiene all'insieme di Mandelbrot. Si vuole disegnare l'insieme di Mandelbrot sul piano complesso:

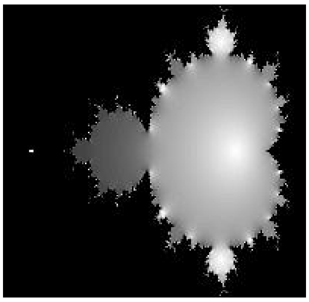
Esercizio 1. Si scriva una function `W = mandel (a, b, c, d, K)` che:

1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli `[a,b]`, `[c,d]` e il numero intero positivo `K`;
2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli "piccoli", assegnando ad esempio alle variabili `x` e `y` le discretizzazioni degli intervalli `[a,b]` e `[c,d]`, rispettivamente;
3. costruisce la matrice `W` tale che l'elemento `(h,k)` di `W` è il `K`-esimo elemento della successione $\{z_n\}_n$, ottenuto con $s =$`x(h)+i*y(k)`;
4. disegna l'immagine della matrice `exp(-abs(W'))` mediante il comando `imagesc`, e resituisce in output `W`.

Attenzione: per certi valori di s la successione $\{z_n\}_n$ diverge molto velocemente, per cui il valore calcolato di z_K risulta essere `NaN` (Not a Number). Quindi, al punto 3, inserire un controllo sulla grandezza del modulo di z_n, per n=1,...,K: ad esempio, se il modulo è maggiore di `1.e16`, si interrompe l'iterazione e si assegna a `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato.

Il comando

```
octave:1> W=mandel(-2,0.6,-1,1,20);
```

dovrebbe produrre la figura 

Provare a cambiare la `colormap`, ad esempio mettendo la `rgb`. Per fare questo occorre copiare nella propria directory il file `rgb` (se già non l'avete): in una shell scrivere `cp /home/m/meinib/LDMC09/rgb .`. Successivamente dare i comandi

```
octave:2> load("rgb")
octave:3> colormap(rgb);
octave:4> imagesc(W')
```

Fare degli "zoom" provando con altri valori di `a,b,c,d`.

2 Altri insiemi di Mandelbrot

Si consideri ora la successione $\{z_n\}_n$ definita come

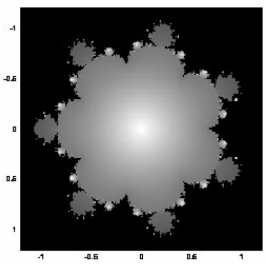
$$\begin{aligned} &z_1 = s, \\ &z_{n+1} = z_n^p + s, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

dove s è un numero complesso fissato, e p è un intero maggiore di 1 fissato.

Esercizio 2. Si fissi p e, come nell'esercizio precedente, si disegni l'insieme dei punti s del piano complesso tali che la successione è limitata. Per far questo si definisca la function `W = mandelp(a,b,c,d,p,K)` in modo analogo all'Esercizio 1. Si provino diversi valori di p.

Il comando

```
octave:5> W=mandelp(-1.2,1.2,-1.2,1.2,8,20);
```

dovrebbe produrre l'immagine 

3 Insiemi di Julia

Sia s un numero complesso fissato e si consideri la successione $\{z_n\}_n$ definita come:

$$\begin{aligned} &z_1 \quad \text{numero complesso fissato in modo abritrario} \\ &z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Vogliamo disegnare i bacini di attrazione della successione, al variare di z_1 scelto in un rettangolo `[a,b] x i [c, d]` del piano complesso.

Esercizio 3. Si scriva una function `W=julia(a, b, c, d, s, K)` che disegni i bacini di attrazione della successione, al variare di z_1 nel rettangolo del piano complesso `[a,b] x i [c, d]`, dove `a,b,c,d`:

1. si suddividano gli intervalli [a,b] e [c,d] in sottointervalli piccoli, ottenendo una griglia del rettangolo [a,b] x i [c, d];

2. per ciascun punto `x(h)+i*y(k)` della griglia: si calcolino gli elementi della successione z_n , per n=1,...,K, ottenuti con z_1 = `x(h)+i*y(k)` (come negli esercizi precedenti, si interrompa il calcolo se $|z_n|$ è "troppo grande"); si definisca `W(h,k)` l'ultimo elemento calcolato della successione;

3. si disegni la figura definita da `W`

Scegliendo [a,b]=[-1.5, 1.5], [c, d] = [-1.5, 1.5], s = 0.27334 - 0.00742 i , k=20, dovreste ottenere l'immagine