Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 3 - 18/3/2009

1 Il segno di un numero complesso

Dato il numero complesso z non immaginario puro, definiamo

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

Il segno si può ottenere mediante le istruzioni `sign` e `real`:

```
octave:1> z=4*exp(i*6);
octave:2> s=sign(real(z))
s =  1
octave:3> z
z =  3.8407 - 1.1177i
```

Si può dimostrare che il segno del numero complesso z è il limite della successione $\{x_k\}_k$ definita come:

$$x_1 = z,$$
$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_k^{-1}}{2}, \quad k \geq 0$$

Esercizio 1. Si scriva la function `s = segno(z, maxiter, eps)` che prende come input il numero complesso `z`, l'intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`. Calcola gli elementi della successione $\{x_k\}_k$ fino quando si verifica una delle seguenti condizioni: $k =$`maxiter` o $|x_{k+1} - x_k| <$ `eps`. Restituisce in output `s`, che è l'ultimo elemento calcolato della successione.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:7> format long e
octave:8>  s=segno(z,10,1.e-10)
s = 1.00000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
```

Modificare la `function` in modo che restituisca in output anche il numero `n` di elementi della successione che ha calcolato, e stampi sullo schermo $diff = |x_{k+1} - x_k|$ per ogni valore di k. Dovreste ottenere:

```
octave:9>  s=segno(z,10,1.e-10)
diff =  1.89570515129166e+00
diff =  8.52981983439299e-01
```

```
diff =  2.87253153593710e-01
diff =  4.06288977017036e-02
diff =  8.25840924536849e-04
diff =  3.41006613825517e-07
diff =  5.81182570394288e-14
s = 1.00000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
n =  7
```

Che cosa si osserva? Che tipo di convergenza è?

Scegliere un numero complesso con parte reale piccola, ad esempio 10^{-2}. Quante iterazioni servono per avere una differenza più piccola ad esempio di 10^{-12}?

Che cosa succede se scelgo come z un numero immaginario puro?

2 Le immagini in octave

Octave rappresenta le immagini mediante una matrice A di interi dimensione $p \times q$, associando all'elemento (i, j) della matrice A un colore opportuno. Più precisamente, se $a_{i,j} = k$, il colore dell'elemento (i, j) è quello definito dalla $k-$esima riga della matrice `colormap`. La matrice `colormap` è una matrice 64×3 , con elementi compresi tra 0 e 1, dove ciascuna riga rappresenta un colore mediante una terna (r, g, b) che definisce la quantità di rosso, verde e blu.

```
octave:24> format short
octave:25> size(colormap)
ans =

   64    3

octave:26> colormap
ans =

   0.00000   0.00000   0.50000
   0.00000   0.00000   0.56349
   0.00000   0.00000   0.62698
   0.00000   0.00000   0.69048
   0.00000   0.00000   0.75397
   0.00000   0.00000   0.81746
   0.00000   0.00000   0.88095
   0.00000   0.00000   0.94444
   0.00000   0.00794   1.00000
lines 1-9
```

Se A è una matrice $p \times q$ con elementi interi compresi tra 1 e 64, il comando `image(A)` produce un'immagine $p \times q$, il cui elemento (i,j) è rappresentato dal colore sulla riga di indice $a_{i,j}$ della matrice `colormap`. Ad esempio:

```
octave:28> A=zeros(64*5, 64*3);
octave:29> for k=1:64, A(5*k-4: 5*k,  : ) = k; end
octave:30> image(A)
```

La `colormap` può essere modificata, ad esempio:

```
octave:31> colormap( ocean(64) );
```

Per ripristinare quella di default:

```
octave:33> colormap( "default" );
```

Si modifichi a piacere la matrice A e si disegni l'immagine corrispondente. Se gli elementi della matrice A non sono interi compresi tra 1 e il numero di righe della `colormap`, conviene usare l'istruzione `imagesc(A)`, che costruisce l'immagine riscalando opportunamente gli elementi della matrice A (si veda l'help).

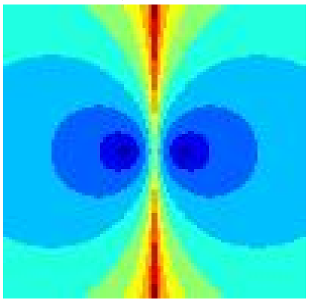
3 Convergenza della successione "segno"

Vogliamo ora disegnare i bacini di attrazione della successione $\{x_k\}_k$ nel rettangolo del piano complesso $[a, b] \times [ic, id]$, dove $[a, b]$, $[c, d]$ sono intervalli della retta reale.

Esercizio 2. Si scriva una function `bsegno( a, b, c, d, maxiter, eps)` che:

1. prende in input gli estremi `a,b,c,d` degli intervalli $[a, b]$, $[c, d]$,il numero intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;
2. suddivide gli intervalli `[a,b]` e `[c,d]` in sottointervalli piccoli, ad esempio mediante il comando `x=linspace(a,b,100)`, `y=linspace(c,d,100)`;
3. costruisce la matrice `iter` di dimensione `length(x) x length(y)` tale che l'elemento `(h,k)` di `iter` è il numero di elementi della successione calcolati con la function `segno`, a partire da `z=x(h) + i*y(k)`;
4. disegna i bacini di attrazione mediante il comando `imagesc(x, y, iter)`

Assegnare un valore ad a,b,c,d, maxiter e eps, ad esempio `a=c=-5, b=d=5, eps = 1.e-8, maxiter = 20`. Dovreste ottenere un'immagine del tipo



Provare con altri valori.

4 Iterazione segno matriciale

Sia A una matrice $n \times n$ a elementi complessi, senza autovalori immaginari puri. Si definisca la successione di matrici $\{X_k\}_k$:

$$X_1 = A,$$
$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad k \geq 0$$

Esercizio 3. Si scriva la function `W = segnom(A, maxiter, eps)` che prende come input la matrice `A`, l'intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`. Calcola gli elementi della successione $\{X_k\}_k$ fino quando si verifica una delle seguenti condizioni: $k =$`maxiter` o $||X_{k+1} - X_k||_1 <$ `eps` (per il calcolo della norma si utilizzi la funzione `norm`). Restituisce in output `W`, che è l'ultimo elemento calcolato della successione.

Si calcolino autovalori e autovettori di W e di A (utilizzare la funzione `eig`). Che proprietà ha il limite W?