

Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 1 - 4/3/2009

1 Un po' di riscaldamento

Utilizzando il comando `plot` tracciamo il grafico della funzione $f(x) = \sin(x) + x \cos(x)^2$ nell'intervallo $[0, 2]$:

```
octave:1> x=[0:0.01:2];
octave:2> y=sin(x)+x.*cos(x).^2;
octave:3> plot(x,y)
```

Esercizio 1. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = 1/(x-1)^2 + 3/(x-2)^2$ nell'intervallo $[0, 3]$ (attenzione alle singolarità! Utilizzare il comando `hold on`, e ricordarsi di dare il comandi `hold off`, `close all` al termine dell'esercizio)

Esercizio 2. Si definisca una function `epicicloide(T,a,b)` che disegni l'epicloide:

$$\begin{aligned}x(t) &= (a+b)\cos(t) - b\cos((a/b+1)t) \\y(t) &= (a+b)\sin(t) - b\sin((a/b+1)t), \quad 0 \leq t \leq T\end{aligned}$$

Si provi a scegliere $a = 12$; $b = 5$; $T=10\pi$. Si provi con altri valori dei parametri.

2 Numeri complessi

Le variabili `i`, `j`, `I`, `J` sono speciali, in quanto rappresentano l'unità immaginaria:

```
octave:4> i
ans = 0 + 1i
octave:5> j
ans = 0 + 1i
octave:6> I
ans = 0 + 1i
octave:7> J
ans = 0 + 1i
octave:8> sqrt(-1)
ans = 0 + 1i
```

Fare giochetti con le funzioni `abs`, `angle`, `imag`, `conj`, `real`. Ad esempio si verifichi sperimentalmente che $|x| = (x\bar{x})^{1/2}$:

```

octave:9> x=2+4i
x = 2 + 4i
octave:10> y=conj(x)
y = 2 - 4i
octave:11> sqrt(x*y)
ans = 4.4721
octave:12> abs(x)
ans = 4.4721
octave:13> abs(y)
ans = 4.4721

```

Oppure che $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

```

octave:14> theta=10;
octave:15> x=cos(theta)+i*sin(theta)
x = -0.83907 - 0.54402i
octave:16> y=exp(i*theta)
y = -0.83907 - 0.54402i
octave:17> x-y
ans = 0

```

Data la rappresentazione cartesiana $x = a + ib$, possiamo trovare la rappresentazione polare $x = re^{i\theta}$ mediante le funzioni `abs` e `angle`:

```

octave:18> x=-3+2*i
x = -3 + 2i
octave:19> r=abs(x)
r = 3.6056
octave:20> theta=angle(x)
theta = 2.5536
octave:21> y=r*exp(i*theta)
y = -3 + 2i

```

Per disegnare il numero complesso x sul piano complesso, è sufficiente fare

```

octave:22> plot(real(x), imag(x), 'o')

```

Utilizzando gli array, si possono disegnare “tanti” punti sul piano complesso, ad esempio:

```

octave:23> t=[0:0.01:2];
octave:24> x=[t.^2];
octave:25> y=[2*t-1];
octave:26> z=x+i*y;
octave:27> plot(z, 'o')

```

Esercizio 3. Scrivere un programma `cerchio(R)` che disegni la circonferenza di centro 0 e raggio R (utilizzare il comando `axis(equal)` per fare in modo che la scala orizzontale sia la stessa che la scala verticale). Scrivere poi un programma `cerchio1(c,R)` che disegni la circonferenza di centro c e raggio R

3 Rotazioni e traslazioni sul piano complesso

Un trapezio può essere rappresentato mediante l’aritmetica complessa:

```

octave:28> z=[0 1 1+2i 3i 0] # osservare un vertice ripetuto!
z =

```

```

0 + 0i  1 + 0i  1 + 2i  0 + 3i  0 + 0i
octave:29> plot(real(z),imag(z),'-')
octave:30> axis([-1 2 -1 4], "equal")

```

Se z è un numero complesso, la traslazione di w si esegue facilmente con l'aritmetica complessa, eseguendo l'operazione $y = z + w$. La traslazione della quantità $w = 0.5 + i$ si ottiene così:

```

octave:31> w=0.5+i;
octave:32> y=z+w;
octave:33> hold on
octave:34> plot(real(y),imag(y),'g-')

```

Anche le rotazioni si rappresentano facilmente con l'aritmetica complessa: se z è un numero complesso, la rotazione di un angolo θ si ottiene moltiplicando z per $e^{i\theta}$. Con questa osservazione ruotiamo la figura originale di $\pi/6$ radianti:

```

octave:35> mu=mean(z(1:end-1)) # calcola la media delle coordinate dei vertici
mu = 0.50000 + 1.25000i
octave:36> theta=pi/6;
octave:37> omega=exp(i*theta);
octave:38> y=omega*(z-mu)+mu; # trasla la figura per mettere il centro
# nell'origine, esegue la rotazione, e di nuovo trasla
octave:39> plot(real(y),imag(y),'b-')

```

Esercizio 4. Avete mai sentito parlare di “T-puzzle”? È un popolare puzzle che consiste nel formare la lettera T mediante l'accostamento di quattro figure geometriche, costituite da 2 trapezi, un triangolo e un pentagono irregolare. Provate a cercare con Google “T-puzzle” per avere maggiori dettagli. I singoli pezzi possono essere rappresentati con l'aritmetica complessa, e le singole mosse mediante rotazioni e traslazioni sul piano complesso. Provate a costruire il vostro T-puzzle elettronico, definendo i vettori che rappresentano le figure geometriche e dando la soluzione, espressa mediante rotazioni e traslazioni.

4 Giochetti con la FFT

La funzione `fft` calcola la trasformata discreta di Fourier (si veda l'help), ad esempio:

```

octave:21> X=fft(eye(4))
X =

1 + 0i  1 + 0i  1 + 0i  1 + 0i
1 + 0i  0 - 1i  -1 + 0i  0 + 1i
1 + 0i  -1 + 0i  1 + 0i  -1 + 0i
1 - 0i  0 + 1i  -1 - 0i  0 - 1i

```

Esercizio 5. Verificare sperimentalmente che la seconda colonna della matrice $X=\text{fft}(\text{eye}(n))$ ha elementi ω_n^{k-1} , per $k = 1, \dots, n - 1$, dove $\omega_n = e^{-2\pi i/n}$.

Esercizio 6. Fissato n , calcolare $X=\text{fft}(\text{eye}(n))$ e, utilizzando il comando `plot` disegnare le n curve a tratti che si ottengono collegando i numeri complessi sulla i -esima colonna di X , per $i=1, \dots, n$. Provare con $n=4$, poi $n=17$. Che figura si ottiene?