Appunti sulla Teoria della Misura e della Integrazione
Corso di Istituzioni di Matematiche II
Prof. Sergio Steffé, AA1997/98

Introduzione

Misurare le lunghezze, le aree, i volumi, le masse e le densità dei corpi, sono problemi di grande importanza pratica che richiedono alcune conoscenze matematiche non del tutto banali. L'inizio dello studio matematico di questi problemi risale a parecchie migliaia di anni fa. Sappiamo che un orafo imbroglione fu pizzicato da Archimede, che misurò con precisione il titolo della lega con cui era stata confezionata una corona d'oro, determinandone - senza smontarla ! - la densità . Sappiamo che l'estensione dei campi veniva misurata con grande cura, e compariva nei contratti di compravendita degli Assiro Babilonesi. Insomma gli antichi avevano abbastanza strumentazione e conoscevano abbastanza geometria piana e dello spazio per dare definizioni precise ed accurate di lunghezze, di aree, di volumi: sufficienti comunque per tutti gli usi pratici. Mentre, per fare un confronto con un problema in un certo senso simile, per una misura accurata del tempo, necessaria per le grandi navigazioni e per lo sviluppo della Cinematica, si dovette aspettare molto più tardi: mancavano sia gli strumenti di misura (i cronometri) che le tecniche matematiche (il calcolo differenziale).

All'inizio di questo secolo, una serie di problemi matematici riproposero il problema della misura e dell'integrazione, che ad essa è strettissimamente legata, in contesti più generali. Da un lato la necessità, sentita sopratutto in Analisi, di avere delle definizioni di Integrale che si potessero applicare a vaste classi di funzioni e che poi si comportassero bene rispetto al passaggio al limite. D'altro lato le necessità di nuove branche della Matematica, come il Calcolo delle Probabilità e lo studio dei Processi Stocastici, che avevano bisogno per i loro fondamenti di una grandissima generalità.

Così tra la fine del 1800 e il 1940 venne sviluppata quella nuova branca della Matematica chiamata "Teoria della Misura", e che è oggi una base indispensabile della cultura di ogni matematico che si occupi di Analisi o di Calcolo delle Probabilità.

Come sempre accade in simili casi, la nuova teoria diede un nuovo e più generale e in un certo senso anche più elementare (ricordiamo che elementare non vuol dire semplice o facile, ma piú vicino agli elementi, e questo spesso in matematica é sinonimo di più difficile !) approccio anche ai concetti già noti di lunghezza, area, volume, e sancì anche l'uso di alcune terminologie e simbologie, ora entrate nel gergo scientifico comune.

Una introduzione alla teoria della misura, nell'ambito di un normale corso di Analisi II che disponga delle tradizionali 3 ore di teoria e 3 di esercitazione alla settimana, richiede circa un mese, un mese e mezzo, per enuciare, dimostrare ed illustrare i fatti principali. Molte delle dimostrazioni sono ovviamente un pochino tecniche, e perciò nel corso di Istituzioni del II anno del Corso di Laurea in Chimica Industriale, in cui il tempo a disposizone è molto più ristretto, e l'interesse per certe tecniche più squisitamente matematiche non è così spiccato, ci si limiterà ad inquadrare mediante opportune definizioni e mediante gli enunciati di pochi ed essenziali teoremi i punti più basilari della teoria della misura e dell'integrazione, dando invece più risalto alle applicazioni.

In questi appunti ci limiteremo solo a riassumere schematicamente quelle poche definizioni e quei pochi risultati di carattere generale che è difficile trovare sui testi di Istituzioni di Matematiche e che richiederebbero allo studente la consultazione di testi specialistici di non facile lettura per uno studente del secondo anno. Gli argomenti qui illustrati sono stati corredati a lezione da opportuni esempi e commenti, e per questo motivo questi appunti non sono assolutamente intesi come sostitutivi della frequenza alle lezioni.

1. Famiglie di Insiemi

Quando si prova a dare una definizione matematica di un semplice concetto di teoria della misura come per esempio quello di area di un insieme del piano, si procede di solito per gradi: prima si definisce l'area per le figure geometriche elementari, come i rettangoli, i triangoli, e i poligoni. Poi si cerca di estendere la definizione agli altri insiemi meno regolari. Per un po' di tempo si era sperato di risuscire ad estendere la definizione a tutti gli insiemi. Purtroppo quando si studiò a fondo il problema ci si rese conto che ciò non era assolutamente possibile. Questo vuol dire che si può riuscire - e in effetti si è riusciti - a dare una ragionevole definizione di area non sulla classe di tutti i sottoinsiemi del piano, ma solo su una particolare - se pure vastissima - famiglia di insiemi. Questo stato di cose si verifica per la definizione di lunghezze, di aree di volumi e praticamente in tutti gli altri casi. Di conseguenza è interessante isolare e studiare in generale le proprietà che caratterizzano le famiglie degli insiemi su cui è possibile estendere le varie definizioni di lunghezze, aree, volumi e delle varie generalizzazioni cui si giunge nello studio della teoria della misura.

Vediamo le definizioni più semplici e generali che vengono usate:

Sia X un insieme dato, a cui spesso ci si riferisce come allo "spazio" e consideriamo una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X.

Se si prendono insiemi appartenenti ad $\mathcal{F}$ e si opera su di essi con le operazioni insiemistiche come unione, intersezione e differenza, si ottegono altri insiemi, che possono appartenere ad $\mathcal{F}$ oppure no. Le famiglie di insiemi interessanti sono quelle che sono abbastanza grandi da contenere i risultati delle varie operazioni insiemistiche.

Precisamente:

Definizione 1: anello

Sia X un insieme dato; una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X si dice un **anello** se

$$\begin{aligned}&\emptyset \in \mathcal{F}\\ &\forall A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

●●●

Definizione 2: σ-anello

Sia X un insieme dato; una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X si dice un **σ-anello** se è un anello ed inoltre:

$$A_n \in \mathcal{F} \quad per \quad n = 1, 2, 3, ... \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

●●●

Definizione 3: algebra

Si dice **algebra** un anello tale che $X \in \mathcal{F}$. ●●●

Definizione 4: σ-algebra

Si dice **σ-algebra** un σ-anello tale che $X \in \mathcal{F}$. ●●●

Ci sono svariati modi equivalenti tra loro per caratterizzare queste famiglie di insiemi. Per esempio possiamo enunciare il seguente

Teorema 1: limite di successioni monotone
Sia X un insieme dato; un anello $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X è un σ-anello se e solo se

$$A_n \in \mathcal{F} \quad \forall n \quad \text{e} \quad A_n \uparrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$$

●●●

E' interessante notare che se si prende una qualsiasi famiglia $\mathcal{G}$ di sottoinsiemi di X, è sempre possibile costruire il piú piccolo anello o σ-anello, o algebra o σ-algebra che contenga tutti gli insiemi della famiglia $\mathcal{G}$:

Teorema 2: anello, algebra, σ-anello, σ-algebra generati da una famiglia di insiemi
Sia X un insieme, e sia $\mathcal{G}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Detta $\mathcal{F}$ la famiglia che è intersezione di tutte le famiglie di insiemi che siano un anello e che contengano $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ è un anello, contiene ovviamente $\mathcal{G}$, ed è il più piccolo anello contenente $\mathcal{G}$, nel senso che se una altra famiglia di insiemi contiene $\mathcal{G}$ ed è un anello, allora contiene anche $\mathcal{F}$. Ci si riferisca a questo $\mathcal{F}$ come all'anello generato da $\mathcal{G}$. Del tutto analogamente si ottengono l'algebra, il σ-anello e la σ-algebra generate da $\mathcal{G}$. ●●●

Per esempio sul piano si possono considerare tutti i possibili rettangoli a lati paralleli agli assi coordinati. Il piú piccolo anello che contiene tutti questi rettangoli é la famiglia dei cosidetti plurirettangoli. La piú piccola σ-algebra che contiene tutti questi rettangoli è una famiglia molto più grande e complessa; quello che succede è che utilizzando unioni di infinità numerabili di rettangoli è possibile ottenere insiemi con contorni non rettilinei, come i cerchi per esempio. Ma unioni numerabili di cerchi permettono di ottenere tutti gli insiemi aperti; ma anche gli insiemi chiusi, che sono i complementari degli aperti, devono fare parte della famiglia; si capisce che allora sono veramente tanti gli insieme che devono farne parte. La famiglia che si ottiene in questo modo in uno spazio Euclideo si dice la famiglia degli insiemi Boreliani (da Emile Borel).

2. Funzioni di Insieme

Lunghezze, aree, volumi, sono tutte delle applicazioni a valori reali positivi, definite su opportune famiglie di insiemi, con delle proprietà che consideriamo intuitive. La definizione di misura generalizza questi casi elementari astraendone le proprietà essenziali.

Definizione 5: spazio misurabile
Uno **spazio misurabile** è una coppia $(X, \mathcal{F})$, ove X è un insieme e $\mathcal{F}$ è un σ-anello, o una σ-algebra di sottoinsiemi di X. ●●●

Definizione 6: misura, probabilità
Dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{F})$, una funzione di insieme $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ si dice una **misura** su $(X, \mathcal{F})$ se valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\mu(\emptyset) = 0 \\
&\mu(A) \geq 0 \quad \text{(positività)} \\
&A, B \in \mathcal{F} \quad A \subseteq B \quad \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{(monotonia)} \\
&A, B \in \mathcal{F} \quad A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(additività)} \\
&A_n \in \mathcal{F} \quad \forall n \quad \text{e} \quad A_n \uparrow A \Longrightarrow \quad \mu(A_n) \to \mu(A) \quad \text{(continuità)}
\end{aligned}$$

Se inoltre $\mathcal{F}$ è una σ-algebra ed è $\mu(X) = 1$, μ si dice una **probabilità** su $(X, \mathcal{F})$.

È chiaro che una misura finita può sempre essere normalizzata ad 1 ottenendo così una probabilità, semplicemente dividendone tutti i valori per la misura di tutto lo spazio $\mu(X)$. ●●●

Teorema 3: σ-additività della misura

Se μ è una misura su $(X, \mathcal{F})$ e $A_n \in \mathcal{F}$ è una successione di insiemi 2 a 2 digiunti e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ allora è

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(segue subito dalla definizione). ●●●

Definizione 7: spazio misura

Uno **spazio misura** è una terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$, ove X è un insieme e $\mathcal{F}$ è un σ-anello, o una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e μ è una misura sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{F})$. ●●●

Definizione 8: σ-finitezza

Una spazio misura si dice **σ-finito** se lo spazio X é unione numerabile di insiemi di misura finita. ●●●

Naturalmente, tranne che in pochi casi, non si può definire una misura μ direttamente su tutti gli insiemi di $\mathcal{F}$. Quello che si fa è definire μ su una famiglia di insiemi molto più piccola, e poi usare dei teoremi che garantiscano il prolungamento di μ alla σ-algebra generata. L'ipotesi di finitezza o di σ-finitezza viene utilizzata in questi teoremi, che sono di grande interesse tecnico per un matematico, ma che qui non tratteremo.

Introduciamo infine un modo di dire molto pratico e molto usato in teoria della misura e della integrazione.

Definizione 9: quasi ovunque rispetto ad una misura μ

Si dice che una certa proprietà vale **quasi ovunque** rispetto alla misura μ (abbreviato "μ q.o.") se l'insieme dei punti per cui la proprietà non vale è un insieme di misura 0 rispetto a μ. A volte ci si riferisce agli insiemi di misura 0 rispetto ad una misura dicendo che essi sono trascurabili rispetto quella misura. ●●●

3. La Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Uno dei casi più tipici di questo processo di costruzione di una misura, è quello della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, che generalizza il concetto intuitivo di lunghezza di un insieme di punti della retta reale.

Si inizia a considerare in $\mathbb{R}$ l'insieme degli intervalli [a,b). Si definisce una funzione di insieme λ ponendo per ogni intervallo $[a, b)$: $\lambda([a, b)) = b - a$, che è proprio la lunghezza dell'intervallo.

Si considera ora la σ-algebra generata dall'insieme degli intervalli. Questa è una classe di insiemi molto grande, che comprende le unioni finite di intervalli (dette anche pluriintervalli), ma anche le unioni numerabili di intervalli, e a causa di ciò anche tutti gli insiemi aperti,chiusi e molti altri ancora. Questa classe è nota come la classe degli insiemi Boreliani di $\mathbb{R}$.

Si estende ora la definizione di λ: si riesce a dimostrare che c'è una sola misura definita sui Boreliani e che coincide con λ sugli intervalli e a questa misura si da il nome di **misura di Lebesgue**, e la si indica ancora con λ.

Ovviamente la misura di Lebesgue coincide con la cosidetta misura di Jordan sugli insiemi su cui quest'ultima era stata definita (una classe di insiemi molto più ristretta dei Boreliani).

Una ulteriore piacevole sorpresa è il fatto seguente: se si considera la classe di degli insiemi che differiscono da un Boreliano per un sottoinsieme di un insieme di misura di Lebesgue zero, si ottiene una classe di insiemi ancora molto più grande di quella dei Boreliani. Questa Classe è nota come la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, e la misura di Lebesgue si può estendere a tutti gli insiemi di questa Classe.

La misura di Lebesgue eredita due notevoli proprietà dalla sua definizione elementare, e precisamente l'invarianza per traslazioni e la sua omogeneità per trasformazioni lineari della retta in sè, e precisamente:

Se $A \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ indichiamo con:

$$c + A = \{c + x \mid x \in A\}$$

$$cA = \{cx \mid x \in A\}$$

Allora è per ogni A misurabile secondo Lebesgue, e $c \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(c + A) = \lambda(A)$$

e se inoltre $\lambda(A)$ è finito:

$$\lambda(cA) = |c|\lambda(A)$$

La classe degli insiemi Boreliani è spesso indicata con $\mathcal{B}$ e quella degli insiemi misurabili secondo Lebesgue con $\mathcal{L}$. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ é σ-finita visto che $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{n=\infty} [n, n+1)$

La definizione di misura di Lebesgue che così si ottiene, si comporta esattamente come ci si aspetta che si comporti la misura intuitiva di lunghezza, ma è definita anche su insiemi più strani, su cui l'intuizione difficilmente permette di prevedere un risultato coerente.

Per esempio, se si prende l'insieme di tutti i numeri razionali, possiamo domandarci quale sia la sua lunghezza. L'intuizione non è di grande aiuto qui. La misura di Jordan (che come già fatto notare prima , anche se per ragioni storiche porta il nome di misura, non è una vera misura perchè non soddisfa la definizione che abbiamo dato di misura), non fornisce una risposta, visto che la misura dall' interno è 0 e dall'esterno $+\infty$. Per la misura di Lebesgue, invece, il calcolo è presto fatto: la misura di Lebesgue di un singolo punto vale 0, ed essendo l'insieme dei numeri razionali numerabile (in base al ben noto risutato di Cantor), è possibile scrivere la misura come somma della serie delle misure dei singoli punti, e quindi si ottiene come somma di una serie ad elementi 0 il valore 0.

4. Misura prodotto

Se sono dati due spazi misura σ-finiti $(X, \mathcal{F}, \mu)$, e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ si può costruire in un modo standard una σ-algebra ed una misura sullo spazio prodotto $X \times Y$.

La costruzione è abbastanza semplice: nel prodotto $X \times Y$ si considera la classe degli insiemi del tipo $A \times B$ con $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Su questi insiemi si definisce una funzione di insieme ponendo semplicemente:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

A questo punto si considera la σ-algebra generata da questi insiemi, che viene indicata col simbolo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ (che non va confuso col semplice prodotto cartesiano delle due classi). Si riesce a dimostrare che esiste una unica misura, che prolunga $\mu \otimes \nu$ su tutto lo spazio misura $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, e che prende il nome di **misura prodotto** $\mu \otimes \nu$.

Questa costruzione si puó estendere ad un numero finito qualsiasi di spazi misura.

In particolare facendo il prodotto di N copie dello spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ si costruisce per ogni $\mathbb{R}^N$ la misura di Lebesgue N-dimensionale che si indica di solito con λ_N; per $N = 2$ si ottiene nel piano la misura delle aree di superfici piane, e per $N = 3$ si ottiene nello spazio la misura di volume dei solidi.

5. Trasformazioni misurabili

Quando si considerano delle generiche applicazioni tra due spazi misurabili, può accadere che insiemi misurabili vengano trasformati in insiemi non misurabili, o viceversa.

Risulta perciò molto importante studiare delle classi di funzioni che abbiano la proprietà di trasformare insiemi misurabili in insiemi misurabili.

La definizione che si usa é la seguente:

Definizione 10: Trasformazioni e Funzioni Misurabili

Siano $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ due spazi misurabili e sia $f : X \to Y$ una applicazione da X in Y. Si dice che f é una **trasformazione misurabile** se

$$\forall B \in \mathcal{G} \quad \text{è} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

In particolare si parla di **funzione misurabile** se si ha una applicazione f da uno spazio misurabile $(X, \mathcal{F})$ a valori in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, misurabile. ●●●

E' subito visto che la composizione di trasformazioni misurabili è ancora una trasformazione misurabile.

Le Funzioni Misurabili sono molto importanti per lo studio dell'integrazione. Esistono svariati criteri per stabilire che una funzione è misurabile.Per esempio, se si stabilisce che $\forall c \in \mathbb{R} \quad f^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}$ allora f è misurabile. Citiamo vari risultati sulle funzioni misurabili:

Somma, differenza, prodotto, divisione (se possibile), max, min di funzioni misurabili sono misurabili

Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono misurabili da $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Se f é una funzione misurabile da $(X, \mathcal{F})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ allora l' insieme $\{(x, y)|x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$ è misurabile in $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$.

Una particolare classe di funzioni misurabili è costituita dalle funzioni semplici:

Definizione 11: funzioni semplici

Se $(X, \mathcal{F})$ è uno spazio misura; supponiamo che siano dati un certo numero m di insiemi misurabili due a due disgiunti $A_1, \ldots A_m \in \mathcal{F}$ e altrettanti numeri reali $c_1 \ldots c_m \in \mathbb{R}$,e supponiamo che si costruisca una funzione da X in $\mathbb{R}$ ponendo:

$$\forall x \in X \quad f(x) = \sum_{i=1}^{i=m} c_i \mathbf{I}_{A_i}(x)$$

Allora la funzione f si dice **semplice**. ●●●

Ovviamente le funzioni semplici sono funzioni misurabili.

Molti dei teoremi di teoria della misura si dimostrano abbastanza facilmente per le funzioni semplici; ci sono poi opportuni teoremi di approssimazione che in varie situazioni permettono di estendere il risultato al caso generale.

6. Integrazione rispetto una misura

La definizione astratta di misura che abbiamo visto nei paragrafi precedenti permette di dare a sua volta una definizione astratta e generale di integrale. La definizione astratta non è in fondo molto diversa da quella che si usa nelle presentazioni elementari dell'Integrale.

In queste presentazioni elementari, si prende una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la si scrive come differenza tra la sua parte positiva f^+ e la sua parte negativa f^- e si definisce l'integrale della funzione f sull'intervallo [a,b] come la differenza tra l'area compresa tra l'asse delle x e il grafico di f^+ e l'area compresa tra l'asse delle x e il grafico di f^-.

Nella definizione astratta e generale è sufficiente rimpiazzare la parola area con una ben definita misura. La definizione che ne risulta è la seguente:

Definizione 12: Integrale di funzione positiva

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misura, che supponiamo σ-finito; consideriamo i numeri reali con la misura di Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ e formiamo lo spazio prodotto $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \lambda)$

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile non negativa, si definisce:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = (\mu \otimes \lambda)\{(x, y)|x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

•••

Infatti, per l'ipotesi di misurabilità della funzione f, l'insieme $\{(x, y)|x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$ risulta misurabile nello spazio prodotto $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \otimes \mathbb{B})$. Si noti comunque che il valore che si ottiene potrebbe anche essere $+\infty$.

Definizione 13: Integrale di funzione di segno generico

Supponiamo di avere ora una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ non necessariamente non negativa. Ovviamente tale funzione si potrà scrivere come differenza tra la sua parte positiva e la sua parte negativa: $f = f^+ - f^-$.

Se $\int_X f^+(x) d\mu(x)$ e $\int_X f^-(x) d\mu(x)$ non sono entrambi infiniti, allora si definisce l'integrale di f rispetto la misura μ:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x)$$

•••

Se poi l'integrale è finito, la funzione si dice anche **sommabile**.

Abbiamo quindi le seguenti possibilità per una funzione f misurabile:
1.- sono finiti entrambi gli integrali di f^+ e g^-: f è sommabile e $\int f(x) d\mu(x)$ è finito.
2.- l'integrale di f^+ è finito mentre l'integrale di g^- è infinito: $\int f(x) d\mu(x) = -\infty$
3.- l'integrale di f^+ è infinito mentre l'integrale di g^- è finito: $\int f(x) d\mu(x) = +\infty$
4.- sono infiniti entrambi gli integrali di f^+ e g^-: non esiste l'integrale di f rispetto la misura μ.

Va notato a questo proposito che le notazioni in uso non sono unanimi: alcuni testi chiamano integrabile una funzione nei primi tre casi, e non integrabile nel quarto caso (e nel caso in cui la funzione non sia misurabile), mentre per altri testi integrabile è sinonimo di sommabile.

Sempre riguardo alle notazioni in uso, si noti che a volte si usa il simbolo $\int f(x) d\mu(x)$ omettendo lo spazio X; bisogna stare attenti dal contesto a non confondere questo integrale definito esteso a tutto lo spazio con un integrale indefinito.

C'è poi l'uso comune, nel caso della misura di Lebesgue, di omettere il simbolo della misura dall'integrale: così $d\lambda_n(x)$ viene rimpiazzato nel simbolo di integrale da $dx_1 dx_2 ... dx_n$. Spesso inoltre il simbolo di integrale viene ripetuto n volte scrivendo $\int \int .... \int$ invece del solo $\int$ per enfatizzare il fatto che i lavora in $\mathbb{R}^n$; si parla in tali casi comunemente di "integrali multipli" .

Si noti infine che in svariate applicazioni sono usati vari altri simboli ottenuti con piccole variazioni a partire dal simbolo di integrale. A volte il significato è profondamente diverso e bisogna stare ben attenti al contesto e alle notazioni usate: simboli del genere sono per esempio usati per le medie integrali, per le parti principali secondo Cauchy, per gli integrali su varietà orientate, per gli integrali stocastici, per gli integrali esterni e per gli integrali interni, per gli integrali di Stieltjes, e via dicendo.

A volte accade anche il contrario: per esempio nel calcolo delle probabilità, le trasformazioni misurabili sono chiamate variabili aleatorie e la attesa matematica di una variabile aleatoria, che viene indicata con un apposito simbolo $\mathbb{E}(T)$ non è null'altro che l'integrale di T rispetto alla probabilità.

Osservazione 1:
Se f è una funzione integrabile e A è un insieme misurabile si definisce:

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_X f(x)\mathbf{I}_A(x)d\mu(x)$$

Osservazione 2:
Se f è una funzione semplice data da $f(x) = \sum_{i=1}^{i=m} c_i\mathbf{I}_{A_i}(x)$, allora l'integrale di f si riduce ad una somma finita:

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{i=0}^{i=m} c_i\mu(A_i)$$

Accade a volte di lavorare con misure diverse su uno stesso spazio misurabile. Un caso molto comune è il seguente:

Definizione 14: densità di una misura rispetto ad un' altra
Sia dato uno spazio misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Una seconda misura ν su $(X, \mathcal{F})$ si dice avere **densità** g rispetto a μ se g è una funzione integrabile e non negativa ed è:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \nu(A) = \int_A g(x)d\mu(x)$$

•••

Teorema 4: integrazione rispetto ad una misura che ha densità rispetto ad una altra misura
Con le stesse notazioni della definizione precedente, se f è una funzione integrabile rispetto $(X, \mathcal{F}, \nu)$, si ha:

$$\int_X f(x)d\nu(x) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$$

•••

7. Proprietà dell'integrale

Supponiamo nel seguito che $(X, \mathcal{F}, \mu)$ sia uno spazio misura assegnato.

Teorema 5: linearità dell'integrale
Se f e g sono funzioni sommabili, allora lo è anche f+g, e si ha:

$$\int_X (f+g)(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x)$$

Se inoltre $c \in \mathbb{R}$ allora cf è sommabile e si ha:

$$\int_X (cf)(x)d\mu(x) = c\int_X f(x)d\mu(x)$$

●●●

Teorema 6: monotonia dell'integrale
Se f e g sono funzioni sommabili con $f \leq g$, allora è:

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x)$$

●●●

Pochè $\int_X 0 \quad d\mu(x) = 0$ ne segue la positività dell'integrale, e cioè $f > 0 \Rightarrow \int_X f(x)d\mu(x) > 0$.

Teorema 7: convergenza monotona
Se f_n è una successione di funzioni sommabili con $f_n \geq 0 \quad \forall n$ che converge monotonamente ad una funzione f (e cioè quasi ovunque $f_n(x) \uparrow f(x)$) allora è:

$$\int_X f_n(x)d\mu(x) \quad \uparrow \quad \int_X f(x)d\mu(x)$$

●●●

Da queste proprietà seguono come corollari molte altre proprietà come per esempio:
Se $A \subset B$ sono insiemi misurabili ed $f \geq 0$ è misurabile allora è:

$$\int_A f(x)d\mu(x) \leq \int_B f(x)d\mu(x)$$

Se A e B sono insiemi misurabili disgiunti su cui f, misurabile, è sommabile, è:

$$\int_{A\cup B} f(x)d\mu(x) = \int_A f(x)d\mu(x) + \int_B f(x)d\mu(x)$$

8. Teorema di Fubini

Siano dati due spazi misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$.
Si consideri lo spazio misura prodotto: $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$, e si supponga che f sia una funzione sommabile dallo spazio misura prodotto a valori reali. Allora:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \{\int_Y f(x,y)d\nu(y) \ \} \ d\mu(x) = \int_Y \{\int_X f(x,y)d\mu(x) \ \} \ d\nu(y)$$

(e le funzioni dipendenti da paramtro che appaiono all'interno degli integrali esistono quasi ovunque)
●●●

Il teorema di Fubini è molto usato per ricondurre il calcolo di integrali multipli al calcolo di integrali definiti monodimensionali ma dipendenti da parametri, come illustrato nel successivo paragrafo 10.

9. Cambio di variabili negli integrali

Definizione 15: misura immagine
Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misura e $(Y, \mathcal{G})$ uno spazio misurabile, e sia data una trasformazione misurabile $T : X \to Y$. Si può allora definire una nuova misura ν su $(Y, \mathcal{G})$ ponendo:

$$\forall A \in \mathcal{G} \quad \nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$$

La nuova misura si dice **misura immagine** di μ attraverso T. ●●●

In questa maniera si è costruito uno spazio misura $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Se ora si considera una funzione integrabile f su questo spazio, il calcolo del suo integrale può essere messo in relazione ad un integrale fatto rispetto al primo spazio misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$, con la seguente formula:

Teorema 8: cambiamento di variabili

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_{T^{-1}(Y)} f(T(x)) d\mu(x)$$

●●●

Nel paragrafo 10 vedramo delle applicazioni di questo teorema in cui X e Y sono lo stesso spazio $\mathbb{R}^N$ e le due misure μ e ν hanno entrambi densità rispetto la misura di Lebesgue N dimensionale.

●●●

10. Calcolo degli Integrali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

In questo paragrafo consideriamo spazi euclidei con la misura di Lebesgue N dimensionale, e vediamo possano essere utlilizzati alcuni dei risultati precedenti nella pratica comune del calcolo integrale per funzioni di più variabili. L ipotesi che sono fatte nei vari teoremi non sono le più generali, ma si verificano in molti casi pratici.

Iniziamo con un semplice risultato in $\mathbb{R}^2$.

Definizione 16: insiemi normali in $\mathbb{R}^2$
Un insieme del piano si dice **normale rispetto l'asse delle y** se si può scriverlo nella forma:

$$A = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq k(x)\}$$

dove $a < b$ sono numeri reali e $h < k$ sono funzioni continue definite in $[a, b]$ a valori reali. ●●●

Teorema 9: formule di riduzione degli integrali doppi
Se f è una funzione integrabile ed A un insieme normale rispetto l'asse delle y, allora:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \{\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)dy\}dx$$

Per verificare questa formula, si utilizza il teorma di Fubini, e il fatto che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \mathbf{I}_A(x,y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\mathbf{I}_{[h(x),k(x)}(y)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)dxdy &= \int f(x,y)\mathbf{I}_A(x,y)dxdy = \int \{\int f(x,y)\mathbf{I}_A(x,y)dy\}dx = \\ &= \int \{\int f(x,y)\mathbf{I}_{[a,b]}(x)\mathbf{I}_{[h(x),k(x)]}(y)dy\}dx = \\ &= \int \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\{\int f(x,y)\mathbf{I}_{[h(x),k(x)]}(y)dy\}dx = \\ &= \int_a^b \{\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)dy\}dx\end{aligned}$$

●●●

Definizione 17: insiemi normali in $\mathbb{R}^3$
Un insieme dello spazio si dice **normale rispetto l'asse delle z** se si può scriverlo nella forma:

$$A = \{(x,y,z)|(x,y) \in B, \quad h(x,y) \le z \le k(x,y)\}$$

dove B è un insieme misurabile del piano e $h < k$ sono funzioni continue definite su B a valori reali. ●●●

Teorema 10: formule di riduzione degli integrali tripli
Se f è una funzione integrabile e A un insieme normale rispetto l'asse delle z, allora:

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_B \{\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dz\}dxdy$$

Per verificare questa formula, si utilizza il teorma di Fubini, e il fatto che

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \mathbf{I}_A(x,y,z) = \mathbf{I}_B(x,y)\mathbf{I}_{[h(x,y),k(x,y)]}(z)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y,z)dxdydz &= \int f(x,y,z)\mathbf{I}_A(x,y,z)dxdydz = \int \{\int f(x,y,z)\mathbf{I}_A(x,y,z)dz\}dxdy = \\ &= \int \{\int f(x,y,z)\mathbf{I}_B(x,y)\mathbf{I}_{[h(x,y),k(x,y)]}(z)dz\}dxdy = \\ &= \int \mathbf{I}_B(x,y)\{\int f(x,y,z)\mathbf{I}_{[h(x,y),k(x,y)]}(z)dz\}dxdy = \\ &= \int_B \{\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dz\}dxdy\end{aligned}$$

●●●

Definizione 18: sezioni di un insieme in $\mathbb{R}^3$
Se A è un insieme di $\mathbb{R}^3$, indichiamo per ogni $z \in \mathbb{R}$ con

$$A_z = \{(x, y) | (x, y, z) \in A\}$$

l'insieme piano che si ottiene sezionando A con un piano parallelo al piano $x - y$ e passante per il punto z.
•••

Teorema 11: altra formula di riduzione degli integrali tripli
Supponiamo che un insieme A di $\mathbb{R}^3$ si scrivible nella forma:

$$A = \{(x, y, z) | a \leq z \leq b, (x, y) \in A_z\}$$

con $a < b$ reali e con sia A che tutti gli A_z misurabili. Allora se f è una funzione integrabile, si ha:

$$\int_A f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \{\int_{A_z} f(x, y, z) dxdy\} dz$$

•••

Teorema 12: formula per il cambiamento di variabili
Supponiamo di avere una trasformazione bigettiva di classe $\mathbf{C}^1$ e con Jacobiano di rango massimo $T : A \rightarrow B$ dove A e B sono insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Indichiamo con J_T la matrice Jacobiana di T, e con $det(J_T)$ il suo determinante. Sia ora f una funzione integrabile su $B = T(A)$. Vale la formula seguente:

$$\int_B f(y) d\lambda_N(y) = \int_A f(T(x)) |det(J_T)(x)| d\lambda_N(x)$$

•••

osservazione: usando la notazione per cui se

$$(y_1 ... y_N) = (T_1(x_1 ... x_N) ... T_N(x_1 ... x_N))$$

il determinante della matrice Jacobiana della traformazione si indica con

$$\frac{\partial(T_1 ... T_N)}{\partial(x_1 ... x_N),}$$

la formula per il cambiamento di variabili può essere scritta anche così:

$$\int_B f(y_1 ... y_N) dy_1 ... dy_N = \int_{T^{-1}(B)} f(T_1(x_1 ... x_N) ... T_N(x_1 ... x_N)) |\frac{\partial(T_1 ... T_N)}{\partial(x_1 ... x_N)}| dx_1 ... dx_N$$

In questa formula è forse più evidente la somiglianza con le formule viste per una variabile. Queste formule seguono facilmente dal teorema generale di cambiamento di variabili una volta che si sia stabilito che la densità (rispetto la misura di Lebesgue N dimensionale) della misura che si ottiene trasformando la misura di Lebesgue N dimensionale mediante la trasformazione T^{-1} è proprio data dal determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Il fatto in sè è abbastanza intutivo, ma la dimostrazione rigorosa è piuttosto lunga e tecnica e in effetti non sono molti i testi che la riportano completa. Generalmente ci si limita a fare notare, con maggiore o minore dettaglio, che se T è lineare, trasforma un cubo di lato unitario in un iperparallelopipedo i cui lati sono i vettori colonna della matrice che rappresenta T nella base canonica di $\mathbb{R}^N$, e il cui volume è proprio $|det(T)|$. E quindi la misura immagine attraverso T^{-1} della misura di Lebesgue N dimensionale ha proprio per densità $|det(T)|$ rispetto la medesima misura di Lebesgue N dimensionale. Nel caso in cui T non sia lineare, si tratta di approssimare localmente la trasformazione mediante il suo differenziale, e questo giustifica la presenza del determinante della matrice Jacobiana come densità. La parte tecnicamente complicata è proprio quella riguardante il calcolo esatto della densità.

SIMBOLI USATI

Funzione indicatrice di un insieme A:

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A; \\ 1, & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

•••

Parte positiva e parte negativa di una funzione a valori reali:

$$f^+(x) = max(f(x), 0) \quad \text{e} \quad f^-(x) = max(-f(x), 0)$$

•••

Successioni monotone di insiemi:

$$A_n \uparrow A$$

vuol dire che

A_n é una successione di insiemi monotona crescente, cioe con $A_n \subset A_{n+1}$ e che $A = \bigcup A_n$

•••