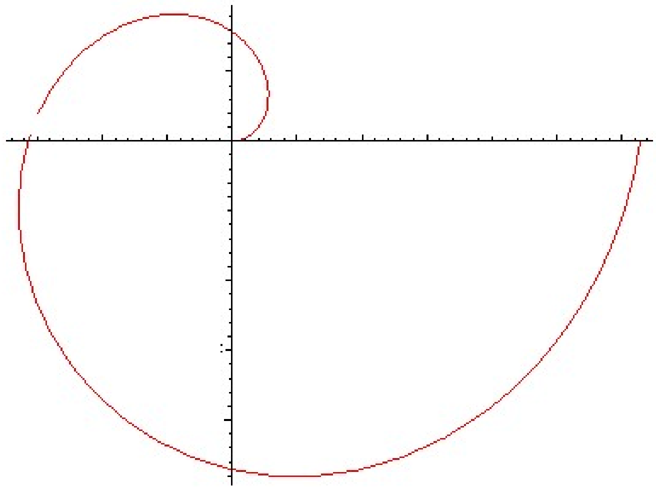
Soluzioni [A]

1.

La curva che delimita la lamina è un arco di spirale, come in figura:



L'area della lamina è data dall'integrale $\iint_\Omega dx\,dy$, che , scritto in coordinate polari, diventa $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\theta} r\,dr$; il suo valore è $16\,\pi^3 / 3$.

La formula di Gauss-Green per l'area $\frac{1}{2}\int_{\gamma^+} -y\,dx + x\,dy$ va applicata alla frontiera orientata della lamina, che è costituita dalla spirale di equazioni parametriche

$x = 2\,\vartheta \cos\vartheta$, $y = 2\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ $(0 \le \vartheta \le 2\,\pi)$

e dal tratto orizzontale orientato da destra a sinistra :

$x = 4\,\pi - t$, $y = 0$ $(0 \le t \le 4\,\pi)$.

Quest'ultimo dà contributo nullo, essendo $y = y' = 0$.

Sulla spirale si ottiene :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta (2\cos\vartheta - 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta) + 2\vartheta\cos\vartheta (2\operatorname{sen}\vartheta + 2\vartheta\cos\vartheta))\, d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi} 2\vartheta^2 \, d\vartheta = 16\,\pi^3/3.$$

La formula del momento di inerzia è data da $I = \frac{\text{massa}}{\text{area}} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Passando anche in questo caso a coordinate polari, si ottiene:

$$\frac{3M}{16\pi^3}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\vartheta} r^3\, dr = \frac{3M}{4\pi^3}\int_0^{2\pi} \vartheta^4\, d\vartheta = \frac{24\, M\, \pi^2}{5}.$$

2.

Consideriamo la matrice jacobiana $\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2(x-1) & 2y & 2z \end{bmatrix}$ e annulliamo il determinante dei suoi minori di ordine 2. Si ottiene :

$y = 0$, $x z = 0$, $y z = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$, $y = 0$ oppure $y = 0$, $z = 0$.

La matrice dunque non ha caratteristica massima sull'asse z e sull'asse x, che però non intersecano la curva data. Di conseguenza non esistono punti singolari.

Scritto il sistema dato nella forma ordinaria $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$, calcoliamo il vettore grad f $\times$ grad g

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 2(x-1) & 2y & 2z \end{vmatrix} = (4yz, -4xz, 4y)$$

nel punto P : $(-\sqrt{14}/2,\ -5\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{7})$.

In forma parametrica l'equazione della retta tangente è dunque :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -\sqrt{7}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sqrt{14}/2 \\ -5\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad , \ t \in R.$$

In forma cartesiana deve essere grad f (P) $\cdot$ (X – P) = 0 , grad g (P) $\cdot$ (X – P) = 0 e dunque (non riportiamo i calcoli) $5x - \sqrt{7}\,y = 8$, $x - \sqrt{7}\,y + 2\sqrt{2}\,z = 5$.

Per trovare la quota massima e minima sulla curva, procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ricordando che la curva non presenta punti singolari.

Prendendo i punti stazionari della funzione lagrangiana

L = $z + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1)$

si ottiene il sistema

$2\lambda x + 2\mu(x-1) = 0$, $2\lambda y + 2\mu y = 0$, $1 + 2\mu z = 0$,

$x^2 + y^2 = 2$, $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Dalla seconda equazione si ricava :

- $\lambda + \mu = 0$,

  sostituendo nella prima equazione, si ottiene che deve essere $\mu = 0$; questa condizione è però incompatibile con la terza equazione.

- $y = 0$

  dalla quarta equazione si ottiene $x = \sqrt{2}$ oppure $x = -\sqrt{2}$.

  Se $x = \sqrt{2}$ l'ultima equazione fornisce $z = \pm\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$; se invece $y = -\sqrt{2}$ non ha nessuna soluzione.

In conclusione, la quota massima vale $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ ed è assunta nel punto ($\sqrt{2}$, 0 , $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$) , quella minima vale $-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ ed è assunta nel punto ($\sqrt{2}$, 0 , $-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$).

3.

Il campo è definito in R^3 privato dell'asse z, che è un dominio connesso ma non semplicemente connesso. Quindi il fatto che sia irrotazionale (non riportiamo i calcoli di questa verifica) non è sufficiente a garantire che sia conservativo. Calcoliamo il lavoro su una curva chiusa non contrattile; scegliamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ che parametrizziamo nella forma (cost , sent , 0) con $0 \le t \le 2\pi$.

Il lavoro vale $\int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\operatorname{sen} t + 1, \cos^2 t + 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \; dt = 0$.

Questo prova che il campo è conservativo.

Per calcolarne il potenziale, procediamo nel modo consueto.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \Rightarrow U = \log(x^2 + y^2) + x^2 z + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \Rightarrow \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} + 1 \Rightarrow \varphi(y, z) = y + c(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \Rightarrow x^2 + c'(z) = x^2 + 1 \Rightarrow c(z) = z \;.$$

In conclusione, U = $\log(x^2 + y^2) + x^2 z + y + z + c$, con c costante arbitraria.

4.

La serie converge puntualmente in R perché $\frac{\log n}{n^4 + x^2} \approx \frac{\log n}{n^4} < \frac{1}{n^3}$.

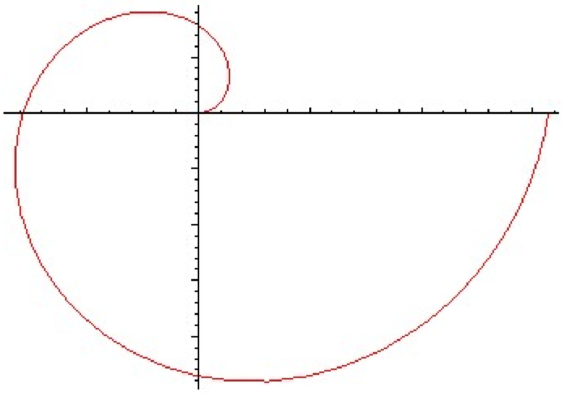
La convergenza è anche totale (e quindi uniforme) in R perché $\| f_n(x) \| = \frac{\log n}{n^4}$ (non riportiamo il calcolo).

Anche la serie delle derivate $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2x \log n}{(n^4 + x^2)^2}$ converge totalmente in R perché $\| f_n'(x) \| = \left| f_n'(n^2/\sqrt{3}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\log n}{n^2}$ che è il termine generale di una serie convergente in quanto $\frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$ (non riportiamo i calcoli).

Soluzioni [B]

1.

La curva che delimita la lamina è un arco di spirale, come in figura:



L'area della lamina è data dall'integrale $\iint_\Omega dx\,dy$, che , scritto in coordinate polari, diventa $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\theta} r\,dr$; il suo valore è $4\pi^3/3$.

La formula di Gauss-Green per l'area $\frac{1}{2}\int_{\gamma^+} -y\,dx + x\,dy$ va applicata alla frontiera orientata della lamina, che è costituita dalla spirale di equazioni parametriche

$x = \vartheta \cos\vartheta$, $y = \vartheta \operatorname{sen}\vartheta$ $(0 \le \vartheta \le 2\pi)$

e dal tratto orizzontale orientato da destra a sinistra :

$x = 2\pi - t$, $y = 0$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Quest'ultimo dà contributo nullo, essendo $y = y' = 0$.

Sulla spirale si ottiene :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-\vartheta \operatorname{sen}\vartheta(\cos\vartheta - \vartheta\operatorname{sen}\vartheta) + \vartheta\cos\vartheta(\operatorname{sen}\vartheta + \vartheta\cos\vartheta))\,d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^2 \; d\vartheta = 4\,\pi^3 / 3.$$

La formula del momento di inerzia è data da I = $\dfrac{\text{massa}}{\text{area}} \iint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Passando anche in questo caso a coordinate polari, si ottiene:

$$\frac{3\,M}{4\,\pi^3}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\vartheta} r^3\, dr = \frac{3\,M}{16\,\pi^3}\int_0^{2\pi} \vartheta^4\, d\vartheta = \frac{6\,M\,\pi^2}{5}.$$

2.

Consideriamo la matrice jacobiana $\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 2(y-1) & 2z \end{bmatrix}$ e annulliamo il determinante dei suoi minori di ordine 2. Si ottiene :

$x = 0$, $x z = 0$, $y z = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$, $y = 0$ oppure $x = 0$, $z = 0$.

La matrice dunque non ha caratteristica massima sull'asse z e sull'asse y, che però non intersecano la curva data. Di conseguenza non esistono punti singolari.

Scritto il sistema dato nella forma ordinaria $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$, calcoliamo il vettore grad f $\times$ grad g

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 2x & 2(y-1) & 2z \end{vmatrix} = (4yz, -4xz, -4x)$$

nel punto P : $(5\sqrt{2}/2, -\sqrt{14}/2, -\sqrt{7})$.

In forma parametrica l'equazione della retta tangente è dunque :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{7}/4 \\ 5/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{14}/2 \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix}, \; t \in R.$$

In forma cartesiana deve essere grad f (P) · (X – P) = 0 , grad g (P) · (X – P) = 0 e dunque (non riportiamo i calcoli) $\sqrt{7}$ x + 5 y = 8 , $\sqrt{7}$ x + y + 2 $\sqrt{2}$ z = 5.

Per trovare la quota massima e minima sulla curva, procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ricordando che la curva non presenta punti singolari.

Prendendo i punti stazionari della funzione lagrangiana

L = $z + \lambda (x^2 + y^2 - 2) + \mu (x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 1)$

si ottiene il sistema

2 λ x + 2 μ x = 0, 2 λ y + 2 μ (y – 1) = 0, 1 + 2 μ z = 0,

$x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$.

Dalla prima equazione si ricava :

- λ + μ = 0 ,

  sostituendo nella seconda equazione, si ottiene che deve essere μ = 0; questa condizione è però incompatibile con la terza equazione.

- x = 0

  dalla seconda equazione si ottiene y = $\sqrt{2}$ oppure y = - $\sqrt{2}$.

  Se y = $\sqrt{2}$ l'ultima equazione fornisce z = $\pm\sqrt{2 (\sqrt{2} - 1)}$; se invece y = -$\sqrt{2}$ non ha nessuna soluzione.

In conclusione, la quota massima vale $\sqrt{2 (\sqrt{2} - 1)}$ ed è assunta nel punto (0 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 (\sqrt{2} - 1)}$) , quella minima vale - $\sqrt{2 (\sqrt{2} - 1)}$ ed è assunta nel punto (0 , $\sqrt{2}$, -$\sqrt{2 (\sqrt{2} - 1)}$).

3.

Il campo è definito in R^3 privato dell'asse z, che è un dominio connesso ma non semplicemente connesso. Quindi il fatto che sia irrotazionale (non riportiamo i calcoli di questa verifica) non è sufficiente a garantire che sia conservativo.

Calcoliamo il lavoro su una curva chiusa non contrattile; scegliamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ che parametrizziamo nella forma (cost , sent , 0) con $0 \le t \le 2\pi$.

Il lavoro vale $\int_0^{2\pi} (2\cos t , 2\,\mathrm{sen}\,t - 1 , \cos^2 t - 1) \cdot (-\mathrm{sen}\,t , \cos t , 0)\, dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \; dt = 0$.

Questo prova che il campo è conservativo.

Per calcolarne il potenziale, procediamo nel modo consueto.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \Rightarrow U = \log (x^2 + y^2) + x^2 z + \varphi (y , z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \Rightarrow \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 1 \Rightarrow \varphi (y , z) = -y + c (z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \Rightarrow x^2 + c'(z) = x^2 - 1 \Rightarrow c (z) = -z \; .$$

In conclusione, $U = \log (x^2 + y^2) + x^2 z - y - z + c$, con c costante arbitraria.

4.

La serie converge puntualmente in R perché $\frac{\log n}{n^2 + x^2} \approx \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$.

La convergenza è anche totale (e quindi uniforme) in R perché $\| f_n (x) \| = \frac{\log n}{n^2}$ (non riportiamo il calcolo).

Anche la serie delle derivate $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2x \log n}{(n^2 + x^2)^2}$ converge totalmente in R perché $\| f_n' (x) \| = \left| f_n' (n / \sqrt{3}) \right| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{\log n}{n^3}$ che è il termine generale di una serie convergente in quanto $\frac{\log n}{n^3} < \frac{1}{n^2}$ (non riportiamo i calcoli).