Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
7 settembre 2017
Compitino di analisi II – versione A civili ed edili*.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori $-3, 0, 3$ con uguale probabilità, e sia $Y = X^2$.

(i) Dire se X ed Y sono *indipendenti*.

(ii) Dire se X ed Y sono *correlate*.

Le due variabili aleatorie **non** sono indipendenti, dato che $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$. Infatti $P(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $P(X = 0)P(Y = 0) = 1/9$.

Tuttavia le due variabili aleatorie **non sono correlate**, ovvero hanno coefficiente di correlazione nullo. Infatti utilizzando il fatto che $E[X] = 0$ otteniamo

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] = E[X^3] = 0.$$

Esercizio 4 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(x^2-3)^n}{n}$. Indicata con $f(x)$ la somma di tale serie, calcolare esplicitamente la derivata $f'(x)$, indicando i teoremi utilizzati per il calcolo. Dedurre poi il valore esplicito di $f(x)$.

Posto $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$ osserviamo che questa è una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$, pertanto convergerà puntualmente per $|y| < 1$; tale convergenza è anche uniforme per $y \in [-r, r]$ per ogni $r < 1$.

Di conseguenza la serie di funzioni che definisce f converge puntualmente se $|x^2 - 3| < 1$, ovvero se $\sqrt{2} < |x| < 2$.

Per il teorema di derivazione per serie di potenze abbiamo che g è derivabile per $|y| < 1$ e $g'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$. Di conseguenza, dato che $f(x) = g(x^2 - 3)$,

$$f'(x) = g'(x^2 - 3) \cdot 2x = \frac{2x}{4 - x^2}.$$

Integrando l'espressione esplicita di g' ed osservando che $g(0) = 0$ otteniamo che $g(y) = -\log(1 - y)$. Di conseguenza $f(x) = -\log(4 - x^2)$.

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
7 settembre 2017

Compitino di analisi II - versione B civili ed edili*..

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori $-2, 0, 2$ con uguale probabilità, e sia $Y = X^2$.

(i) Dire se X ed Y sono *indipendenti*.

(ii) Dire se X ed Y sono *correlate*.

Le due variabili aleatorie **non** sono indipendenti, dato che $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$. Infatti $P(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $P(X = 0)P(Y = 0) = 1/9$.

Tuttavia le due variabili aleatorie **non sono correlate**, ovvero hanno coefficiente di correlazione nullo. Infatti utilizzando il fatto che $E[X] = 0$ otteniamo

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] = E[X^3] = 0.$$

Esercizio 4 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(1/x + 1)^n}{n}$. Indicata con $f(x)$ la somma di tale serie, calcolare esplicitamente la derivata $f'(x)$, indicando i teoremi utilizzati per il calcolo. Dedurre poi il valore esplicito di $f(x)$.

Posto $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$ osserviamo che questa è una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$, pertanto convergerà puntualmente per $|y| < 1$; tale convergenza è anche uniforme per $y \in [-r, r]$ per ogni $r < 1$.

Di conseguenza la serie di funzioni che definisce f converge puntualmente se $|1 + 1/x| < 1$, ovvero se $x < -1/2$.

Per il teorema di derivazione per serie di potenze abbiamo che g è derivabile per $|y| < 1$ e $g'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$. Di conseguenza, dato che $f(x) = g(1 + 1/x)$,

$$f'(x) = g'(1 + 1/x) \cdot (-1/x^2) = \frac{1}{x}.$$

Osservando che $f(-1) = 0$ otteniamo che $f(x) = \log(|x|)$.