- Dire cosa vuol dire che due eventi A e B di uno spazio di probabilità Ω sono indipendenti.
- Si estraggono 6 carte a caso da un mazzo di 52, e si prendono in considerazione i seguenti eventi:
  A="esattamente 2 delle carte estratte sono di cuori"
  B="esattamente 3 delle carte estratte sono di picche"

  Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ (compito, versione A) $P(B|A)$ (compito versione B).
  Dire se A e B sono eventi indipendenti.

Per definizione A e B sono eventi indipendenti se e solo se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Tutte le possibili cinquine che si possono formare da un mazzo di 52 carte sono $\binom{52}{5}$. Di tutte queste, quelle che contengono esattamente 2 carte di cuori sono $\binom{13}{2}\binom{39}{3}$, analogamente quelle che contengono esattamente 3 carte di picche sono $\binom{13}{3}\binom{39}{2}$. Pertanto

$$P(A) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 19 \cdot 37}{2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17}, \qquad P(B) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 19}{2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17}$$

Sia per il calcolo di $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ che per quello di $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ è utile calcolare $P(A \cap B) = \frac{\binom{13}{2}\binom{13}{3}}{\binom{52}{5}}$, pertanto

$$P(B|A) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{39}{3}} = \frac{2 \cdot 11}{19 \cdot 37}, \qquad P(A|B) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{39}{2}} = \frac{2}{19}.$$

Per dedurre che A e B sono eventi indipendenti basta osservare che $P(A|B) \neq P(A)$ o, equivalentemente, che $P(B|A) \neq P(B)$.