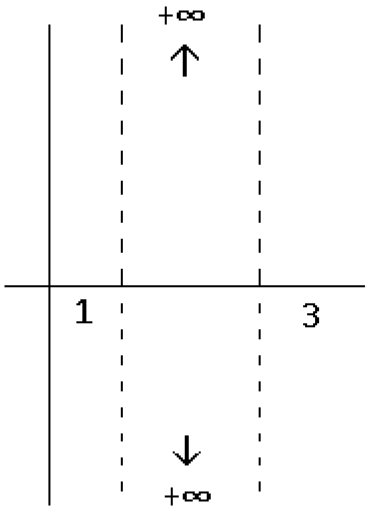
Soluzioni [A]

1.



Per prima cosa osserviamo che $\lim_{\substack{\| (x , y) \| \to +\infty \\ (x , y) \in A}} f (x , y) = +\infty$.

Infatti x si mantiene limitato, mentre y → $\pm \infty$.

Quindi la funzione non ha massimo.

Cerchiamo se ha minimo. Poiché A è aperto e f è di classe C^1 (A), possiamo limitarci a considerare i punti stazionari.

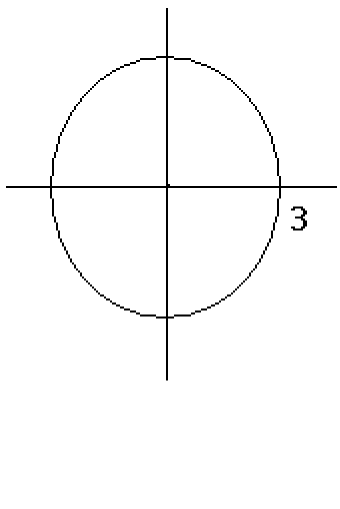
grad f = $\left(-3x^2 + \frac{12\,x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;,\; \frac{12\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

grad f = 0 $\leftrightarrow$ $y = 0 , 4\,x / | \, x \, | = x^2$

Il punto (0 , 0) va scartato perché singolare (e comunque non cade in A); il gradiente si annulla dunque solo nel punto P = (2 , 0) .

Restringendo la funzione sull'asse delle x (con 1 < x < 3) , si ha F (x) = f (x , 0) = $1 - x^3 + 12\,x$ e dunque F' (2) = 0 , F ' (2) = - 12 . Per la restrizione considerata P è punto di massimo e questo basta a dire che la funzione non ha minimo nella regione assegnata (dato che P era l'unico possibile punto di minimo).

Possiamo anche precisare che P è punto di sella; infatti sulla retta verticale passante per P si ha F (y) = f (2 , y) = $12\sqrt{y^2+4} - 7$ e per questa funzione il punto y = 0 è di minimo.



L'unico punto stazionario per la funzione è (2 , 0) , che cade all'interno del dominio; abbiamo già provato che è di sella.

Nel punto singolare (0 , 0) (anch'esso interno al dominio) la funzione vale 1.

Sulla frontiera possiamo utilizzare le coordinate polari e scrivere la funzione nella forma f (ϑ) = 37 – 27 $\cos^3\vartheta$; questa è massima per $\cos\vartheta$ = -1 , cioè nel punto (-3 , 0) , e vale 64; è minima per $\cos\vartheta$ = 1 , cioè in (3 , 0), e vale 10.

Dunque il massimo vale 64 ed è assunto in (-3 , 0) , il minimo 1 ed è assunto in (0 , 0).

Per quanto riguarda i punti di massimo o minimo locale, rimane da considerare (3 , 0) che è di massimo sul ≤ bordo. Poiché f_x (3 , 0) = -15 < 0 , risulta f_x < 0 in tutto un intorno e questo prova che il punto è di minimo locale.

2.

Per simmetria il baricentro si trova sull'asse z; la sua quota z_G è data da $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \;/\; \mathrm{vol}\,D$, essendo D la regione di spazio occupata dal corpo.

Con il metodo delle sezioni con piani paralleli al piano xy, D è descritta da -1 ≤ z ≤ 1 , $|x| \le \sqrt{(1+z)/2}$. Dunque:

vol D = $\int_{-1}^{1} \pi \frac{1+z}{2}\, dz = \pi.$

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \pi \frac{z(1+z)}{2}\, dz = \pi / 3.$$

In conclusione, z_G = 1/3.

3.

Dato il problema u' = f (t , u) , u (t_0) = u_0 , con f (t , u) : I X R → R e $t_0 \in$ I, condizioni sufficienti perché ammetta una e una sola soluzione in grande (cioè definita su I) sono:

- f (t , u) continua in I X R
- f localmente lipschitziana in u, uniformemente rispetto a t (e perché questo accada basta che f_u esista localmente e sia continua)
- | f (t , u) | ≤ a (t) + b (t) | u |, con a (t) e b (t) funzioni continue.

Per la funzione f (t , u) = (u – 1) arctg (t u) le condizioni sono verificate. In particolare, per quanto riguarda l'ultima condizione, si ha | f (t , u) | ≤ π/2 (1 + | u |).

E' facile vedere che la soluzione u (t) è dispari:

Dobbiamo provare che u (t) soluzione → u (- t) soluzione.

Deve cioè essere

– u' (- t) = (u (- t) – 1) arctg (t u (-t))

ovvero

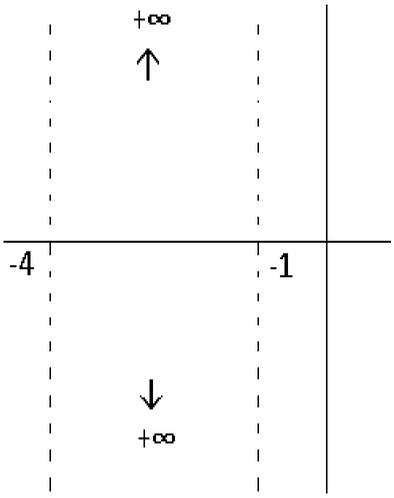
u' (- t) = (u (- t) – 1) [- arctg (t u (-t))] = (u (- t) – 1) arctg (- t u (-t)).

Sostituendo $-t$ con s , l'uguaglianza è stabilita.

Basta dunque calcolare il limite per $t \to +\infty$, che sicuramente esiste perché nella regione $t > 0$, $u > 2$ la derivata u' risulta positiva e dunque u è crescente. Il limite non può essere finito ($= L$) , perché dovrebbe essere $0 = (L - 1) \pi/2$, cioè $L = 1$; questo non è possibile perché u è crescente e $u (0) = 2$.

Soluzioni [B]

1.



Per prima cosa osserviamo che $\lim\limits_{\substack{\|(x,y)\| \to +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty$.

Infatti x si mantiene limitato, mentre y → $\pm\infty$.

Quindi la funzione non ha massimo.

Cerchiamo se ha minimo. Poiché A è aperto e f è di classe C^1 (A), possiamo limitarci a considerare i punti stazionari.

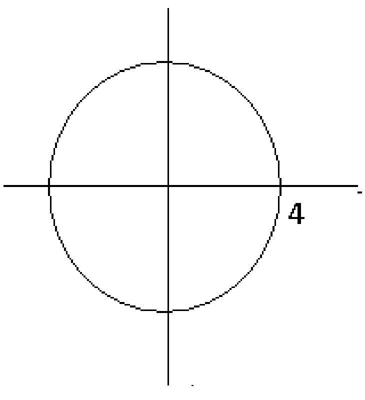
grad f = $\left(3x^2 + \dfrac{12\,x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \dfrac{12\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

grad f = 0 $\leftrightarrow$ $y = 0 , -4x / |x| = x^2$

Il punto (0 , 0) va scartato perché singolare (e comunque non cade in A); il gradiente si annulla dunque solo nel punto P = (-2 , 0) .

Restringendo la funzione sull'asse delle x (con -4 < x < -1) , si ha F (x) = f (x , 0) = $1 + x^3 - 12\,x$ e dunque F' (-2) = 0 , F ' (-2) = - 12 . Per la restrizione considerata P è punto di massimo e questo basta a dire che la funzione non ha minimo nella regione assegnata (dato che P era l'unico possibile punto di minimo).

Possiamo anche precisare che P è punto di sella; infatti sulla retta verticale passante per P si ha F (y) = f (-2 , y) = $12\sqrt{y^2+4} - 7$ e per questa funzione il punto y = 0 è di minimo.



L'unico punto stazionario per la funzione è (-2 , 0) , che cade all'interno del dominio; abbiamo già provato che è di sella.

Nel punto singolare (0 , 0) (anch'esso interno al dominio) la funzione vale 1.

Sulla frontiera possiamo utilizzare le coordinate polari e scrivere la funzione nella forma f (ϑ) = 49 + 64 $\cos^3\vartheta$; questa è massima per $\cos\vartheta = 1$, cioè nel punto (4 , 0) , e vale 113; è minima per $\cos\vartheta = -1$, cioè in (-4 , 0), e vale -15.

Dunque il massimo vale 113 ed è assunto in (4 , 0) , il minimo -15 ed è assunto in (-4 , 0).

Per quanto riguarda i punti di massimo o minimo locale, rimane da considerare (0 , 0) . Passando in coordinate polari, la funzione diventa $1 + r^3 \cos^3\vartheta + 12 r$ che è maggiore di f (0 , 0) = 1 localmente (per $r \to 0$ il termine con r^3 può essere trascurato rispetto a 12 r) . Dunque il punto è di minimo locale.

2.

Per simmetria il baricentro si trova sull'asse z; la sua quota z_G è data da $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \ / \ \mathrm{vol}\,D$, essendo D la regione di spazio occupata dal corpo.

Con il metodo delle sezioni con piani paralleli al piano xy, D è descritta da $-1 \le z \le 3$, $|x| \le \sqrt{(1+z)}\ /2$.
Dunque:

$$\mathrm{vol}\,D = \int_{-1}^{3} \pi \frac{1+z}{4}\,dz = 2\pi.$$

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{3} \pi \frac{z(1+z)}{4}\,dz = 10\pi/3.$$

In conclusione, $z_G = 5/3$.

3.

Dato il problema $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$, con $f(t, u) : I \times R \to R$ e $t_0 \in I$, condizioni sufficienti perché ammetta una e una sola soluzione in grande (cioè definita su I) sono:

- f (t , u) continua in I X R
- f localmente lipschitziana in u, uniformemente rispetto a t (e perché questo accada basta che f_u esista localmente e sia continua)
- $| f(t, u) | \le a(t) + b(t) | u |$, con a (t) e b (t) funzioni continue.

Per la funzione $f(t, u) = (u + 1)\,\mathrm{arctg}(t u)$ le condizioni sono verificate. In particolare, per quanto riguarda l'ultima condizione, si ha $| f(t, u) | \le \pi/2\,(1 + |u|)$.

E' facile vedere che la soluzione u (t) è dispari:

Dobbiamo provare che u (t) soluzione → u (- t) soluzione.

Deve cioè essere

$-u'(-t) = (u(-t) + 1)\,\mathrm{arctg}(t\,u(-t))$

ovvero

$u'(-t) = (u(-t)+1)[-\mathrm{arctg}(t\,u(-t))] = (u(-t)+1)\,\mathrm{arctg}(-t\,u(-t))$.

Sostituendo $-t$ con s, l'uguaglianza è stabilita.

Basta dunque calcolare il limite per $t \to +\infty$, che sicuramente esiste perché nella regione $t > 0$, $u < -2$ la derivata u' risulta positiva e dunque u è crescente. Il limite non può che essere finito ($= L$), perché il grafico della soluzione deve stare al disotto della retta $u = -1$ (corrispondente ad una soluzione dell'equazione; se i due grafici si intersecassero, si perderebbe l'unicità di soluzione per il problema di Cauchy) . Deve dunque essere $0 = -(L+1)\pi/2$, cioè $L = -1$.