Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI
13 novembre 2014

Esercizi sui numeri complessi.

1. Scrivere in forma cartesiana i seguenti numeri complessi

   (i) $\dfrac{(1+i)}{(1-5i)^2}$

   (ii) $\dfrac{z(z-2)}{(z+\bar{z})}$ dove $z = 1 - i$.

   (iii) $(1-2i)^3$

2. Scrivere in forma polare i seguenti numeri complessi

   (i) $(1 + i\sqrt{3})$;

   (ii) $-1 + i$;

   (iii) $-\sqrt{5}$

   (iv) $-i$

   (iv) $(-1 + i\sqrt{3})$.

3. Calcolare

   i $(1-i)^8$

   (ii) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^6}{i^3}$ dove $z = 1 - i$.

   (iii) $(-1+i)^{13}$

4. Sia $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : z = x + iy, \ y > 0\}$ il semipiano superiore del piano complesso. Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tre numeri reali tali che $ad - bc = 1$, si consideri la funzione
$$\phi(z) := \frac{az+b}{cz+d}. \tag{1}$$

   (i) Mostrare che $\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

   (ii) Scrivere la formula della funzione inversa di ϕ e mostrare che ha una forma analoga a quella di ϕ.

   (iii) Mostrare che le trasformazioni della forma (1) formano un gruppo rispetto l'operazione di composizione di funzioni.

   (iv*) Mostrare che ϕ può essere estesa a una funzione continua $\bar{\phi} : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

Esercizi sui limiti.

1. Dire se esistono i seguenti limiti, e nel caso calcolarli:

   i $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+x^2}{1+x+x^3}$

   ii $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan(e^x+100)}{1+x^2}$

   iii $\lim_{x\to-1} \dfrac{x+x^2}{\sqrt{|x|}-1}$

   iv $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+x+x^3}$

2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n := \dfrac{n-1}{n+1}\cos(\pi n)$.

   (i) Calcolare $\sup a_n$ ed $\inf a_n$.

   (ii) Dire se a_n ammette limite, e nel caso calcolarlo.

3. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente da

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sin(\pi + x_n).$$

   (i) mostrare che x_n è limitata; determinare $\sup x_n$ ed $\inf x_n$.

   (ii*) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

4. Sia $a_n := \sqrt[n]{2}$. Calcolare $\sup a_n$ ed $\inf a_n$.

5. Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive, e si supponga che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

   Mostrare che allora esiste una costante C tale che $a_n \le C b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6. Mostrare che se (a_n) è una successione a termini positivi tale che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ allora:

   - se $r < 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;
   - se $r > 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   Mostrare, con dei controesempi, che se $r = 1$ non è possibile, a priori, determinare il valore del limite.

7. Determinare, al variare del parametro $b > 0$, il limite della successione

$$a_n := \binom{2n}{n} b^n.$$