Calcolare il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{1+k^2}\left(\frac{1+3k}{3+k}\right)^k x^k.$$

Determinare il comportamento della serie anche sul bordo dell'intervallllo di convergenza (cioé per $|x| = R$).

Chiamando $c_k := \frac{k}{1+k^2}\left(\frac{1+3k}{3+k}\right)^k$ verifichiamo che

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{1+k^2}}\frac{1+3k}{3+k} \longrightarrow 3 \quad (k \to +\infty).$$

Pertanto $R = \frac{1}{3}$.

Per studiare il comportamento sul bordo osserviamo che

$$\left(\frac{1+3k}{3+k}\right)^k 3^{-k} = \left(1 - \frac{8}{9+3k}\right)^k = \exp(k\log(1 - \frac{8}{9+3k})) = e^{-8/3}(1+O(1/k)).$$

Pertanto se $x = 1/3$ l'addendo k-esimo della serie è

$$\frac{k}{1+k^2}\left(\frac{1+3k}{3+k}\right)^k \sim \frac{e^{-8/3}}{k}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie diverge per $x = 1/3$.

Se $x = -1/3$ l'addendo k-esimo della serie è

$$(-1)^k\frac{k}{1+k^2}\left(\frac{1+3k}{3+k}\right)^k = e^{-8/3}(-1)^k\frac{k}{1+k^2} + O(1/k^2),$$

e dunque la serie in questione si può scrivere come la somma di una serie che converge per Leibnitz ed una assolutamente convergente. Quindi per $x = -1/3$ la serie è convergente (ma non assolutamente convergente).

Calcolare il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(1/k)}{3+k} \left(\frac{1+2k}{5+k}\right)^k x^k.$$

Determinare il comportamento della serie anche sul bordo dell'intervallllo di convergenza (cioé per $|x| = R$).

Chiamando $c_k := \frac{\cos(1/k)}{3+k} \left(\frac{1+2k}{5+k}\right)^k$ verifichiamo che

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{\sqrt[k]{\cos(1/k)}}{\sqrt[k]{3+k}} \frac{1+2k}{5+k} \longrightarrow 2 \quad (k \to +\infty).$$

Pertanto $R = \frac{1}{2}$.

Per studiare il comportamento sul bordo osserviamo che

$$\left(\frac{1+2k}{5+k}\right)^k 2^{-k} = \left(1 - \frac{9}{10+2k}\right)^k = \exp(k \log(1 - \frac{9}{10+2k})) = e^{-9/2}(1+O(1/k)).$$

Pertanto se $x = 1/2$ l'addendo k-esimo della serie è

$$\frac{\cos(1/k)}{3+k} \left(\frac{1+2k}{5+k}\right)^k \sim \frac{e^{-9/2}}{k}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie diverge per $x = 1/2$.

Se $x = -1/2$ l'addendo k-esimo della serie è

$$(-1)^k \frac{\cos(1/k)}{3+k} \left(\frac{1+2k}{10+2k}\right)^k = e^{-9/2}(-1)^k \frac{1}{3+k} + O(1/k^2),$$

e dunque la serie in questione si può scrivere come la somma di una serie che converge per Leibnitz ed una assolutamente convergente. Quindi per $x = -1/2$ la serie è convergente (ma non assolutamente convergente).

Calcolare il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(1/k)}{5+k} \left(\frac{2+k}{1+5k} \right)^k x^k.$$

Determinare il comportamento della serie anche sul bordo dell'intervallo di convergenza (cioé per $|x| = R$).

Chiamando $c_k := \frac{\sin(1/k)}{5+k} \left(\frac{2+k}{1+5k} \right)^k$ verifichiamo che

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{\sqrt[k]{\sin(1/k)}}{\sqrt[k]{5+k}} \frac{2+k}{1+5k} \longrightarrow 1/5 \quad (k \to +\infty).$$

Pertanto $R = 5$.

Per studiare il comportamento sul bordo osserviamo che

$$\left(\frac{2+k}{1+5k} \right)^k 5^k = \left(1 + \frac{9}{1+5k} \right)^k \to e^{9/5}.$$

Pertanto se $|x| = 5$ il modulo dell'addendo k-esimo della serie è

$$\frac{\sin(1/k)}{5+k} \left(\frac{5+10k}{1+5k} \right)^k \sim \frac{e^{9/5}}{k^2}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie converge assolutamente per $|x| = 5$.

Calcolare il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^2}\left(\frac{3+k}{1+2k}\right)^k x^k.$$

Determinare il comportamento della serie anche sul bordo dell'intervallo di convergenza (cioé per $|x| = R$).

Chiamando $c_k := \frac{\sqrt{k}}{1+k^2}\left(\frac{3+k}{1+2k}\right)^k$ verifichiamo che

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{\sqrt[2k]{k}}{\sqrt[k]{1+k^2}}\frac{3+k}{1+2k} \longrightarrow 1/2 \quad (k \to +\infty).$$

Pertanto $R = 2$.

Per studiare il comportamento sul bordo osserviamo che

$$\left(\frac{3+k}{1+2k}\right)^k 2^k = \left(1 + \frac{5}{1+2k}\right)^k \to e^{5/2}.$$

Pertanto se $|x| = 2$ l'addendo k-esimo della serie è

$$\frac{k}{1+k^2}\left(\frac{6+2k}{1+2k}\right)^k \sim \frac{e^{5/2}}{k^{3/2}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie converge assolutamente per $|x| = 2$.