1. Forma generale: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ in un intorno di x_0, x_0 al più escluso

Forma particolare: $f(x)$ continua in x_0, $f(x_0) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 0$ in un intorno di x_0

2. Posto $z = x + iy$: $x^2 - y^2 + 2ixy - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

(i) $\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - \sqrt{9 + y^2} = 3 \end{cases}$ non ha nessuna soluzione (il primo membro è < 0)

(ii) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - |x-3| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \ x \geq 3 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \quad x < 3 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$ $x = 0$, $x = 1$ non accettabili

$\Downarrow$ $x = 2$, $x = -3$

nessuna sh

In conclusione,
le soluzioni sono $z = 2$, $z = -3$.

3. (i) per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{2x}{x} \to 2$

(ii) posto $x - 1 = t \to 0$ $\quad \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi t + \pi))}{\sqrt{1+t} - 1} = \dfrac{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} \pi t)}{\sqrt{1+t} - 1}$

$$\sim \frac{-\pi t}{\frac{1}{2} t} \to -2\pi$$

4. C.E. Deve essere $\sqrt{4 + x^2} > x$. Poiché il termine sotto segno di radice è > 0, questa disequazione equivale a:
$x < 0 \ \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 + x^2 > x^2 \end{cases}$. Si ottiene dunque C.E. $= \mathbb{R}$

SGN $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 + x^2} - x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{4 + x^2} \geq x + 1 \Leftrightarrow$
$x < -1 \ \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ 4 + x^2 \geq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 3/2 \end{cases}$

$+$	0	$-$
	$\frac{3}{2}$	

LIM per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \sim \lg(-2x) \to +\infty$ senza asintoto

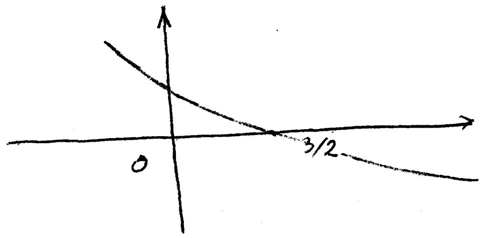
per $x \to +\infty$ $\quad f(x) = \lg \dfrac{4}{\sqrt{4 + x^2} + x} \sim \lg \dfrac{4}{2x} \to -\infty$ senza as.

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2}\,\left(\sqrt{4+x^2} - x\right)} \geq 0 \iff \sqrt{4+x^2} \leq x$$

$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 + x^2 \leq x^2 \end{cases}$ che non ha soluzioni.

Quindi $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e la fz. $f(x)$ è decrescente.

(osserviamo esplicitamente che $f'(x)$ è sempre definita, cioè non ci sono punti di non derivabilità).



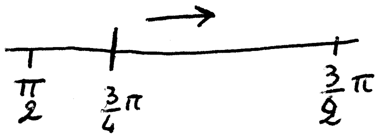
$\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$

$\max f$, $\min f$ non esistono

l'eq. $f(x) = c$ ha sempre una ed una sola soluzione.

5. La successione è ben definita

$a_{n+1} \geq a_n \iff \cos a_n \leq 0$



$\frac{3}{4}\pi < a_n < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \frac{3}{4}\pi < a_{n+1} < \frac{3}{2}\pi$

$\frac{3}{4}\pi < a_n - \cos a_n < \frac{3}{2}\pi$

La fz. $f(x) = x - \cos x$ è continua e crescente ($f' > 0$)

Dunque $f\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) = \left(f\left(\frac{3}{4}\pi\right), f\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\pi\right)$

In conclusione, la successione sta sempre nell'intervallo $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, è crescente e dunque ammette limite, il limite è il punto fisso $\frac{3}{2}\pi$.

Inoltre $\inf a_n = \min a_n = \frac{3}{4}\pi$, $\sup a_n = \frac{3}{2}\pi$, $\max a_n$ non esiste.