Appello #2 [A]

1. Equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}}$$

C.E. $x, y \in R$

SLZ COSTANTI $y = 0$

SLZ NON COSTANTI L'equazione va studiata per $y > 0$ e per $y < 0$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}}$$

$$-\frac{1}{y} = -2\sqrt{1+e^{-x}} + c$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{-x}} + c}$$

Soluzioni positive

Deve essere $\sqrt{1+e^{-x}} > -c/2$.

Per $c \geq 0$ la condizione è sempre verificata : $x \in R$.

Per $c < 0$: elevando al quadrato si trova $e^{-x} > c^2/4 - 1$.

Se $-2 \leq c < 0$, la condizione è sempre verificata : $x \in R$.

Se $c < -2$, deve essere $x < -\log(c^2/4 - 1)$.

Soluzioni negative

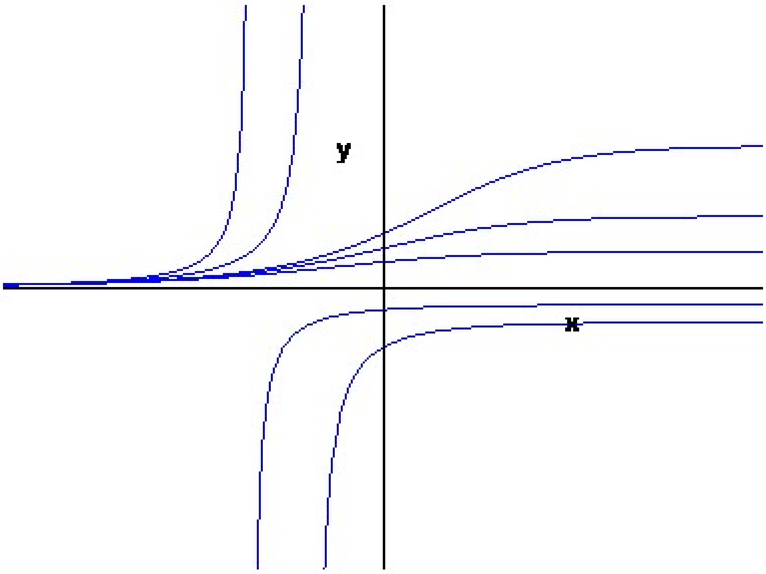
Deve essere $\sqrt{1+e^{-x}} < -c/2$.

Per $c \geq 0$ la condizione non è mai verificata .

Per $c < 0$: elevando al quadrato si trova $e^{-x} < c^2/4 - 1$.

Se $-2 \leq c < 0$, la condizione non è mai verificata.

Se $c < -2$, deve essere $x > -\log(c^2/4 - 1)$.



2. Funzione

$$f(x) = x + \frac{\log|x|}{|x|}$$

C.E. $\quad x \neq 0$

LIMITI $\quad$ per $x \to 0 \quad f(x) \to -\infty$

per $x \to \pm\infty \quad f(x) \to \pm\infty$

la retta $y = x$ è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sopra

DERIVATA $\quad f'(x) = \dfrac{x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$

Per ottenere il segno della derivata , occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$\phi (x) = x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log | x |)$

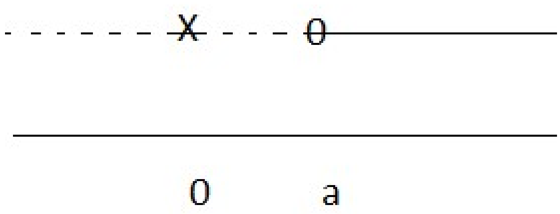
per $x \to 0^{\pm}$ $\quad \phi (x) \to \pm\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad \phi (x) \to +\infty$

$\phi (- 1) = 0$

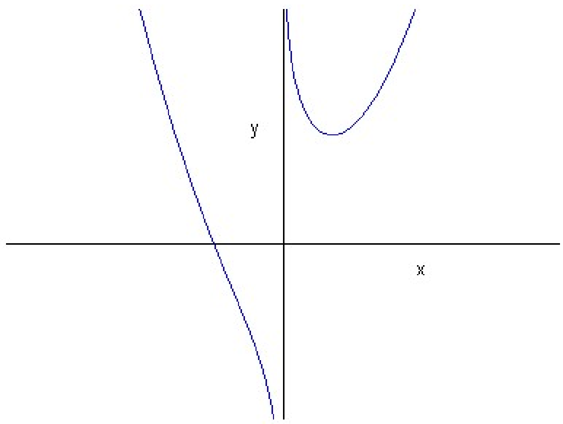
$$\phi' (x) = \frac{2 x^2 - \operatorname{sgn} x}{x}$$

segno di $\phi' (x)$

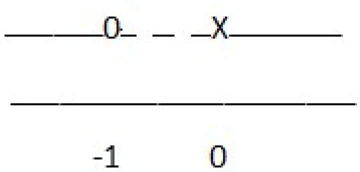


$a = 1 / \sqrt{2}$

grafico di $\phi (x)$



SEGNO DERIVATA $f ' (x)$



DERIVATA SECONDA

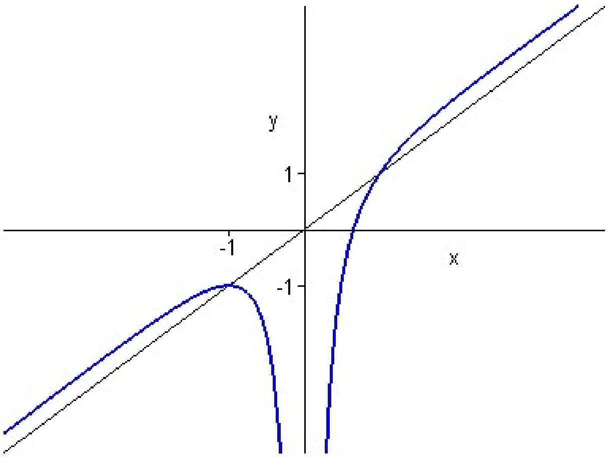
$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(2\log|x| - 3)}{x^3}$$

SEGNO DERIVATA SECONDA f “ (x)

________0---------X---------0________

____

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



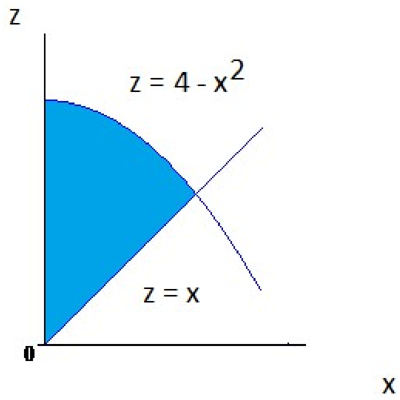
Nell’intervallo (0 , +∞) la funzione è crescente, dunque iniettiva.

Poiché f (e) = e + (1 / e) , la derivata richiesta è 1 / f’ (e) = 1.

3. Volume

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

La regione si ottiene ruotando attorno all’asse delle z il dominio sotto indicato :



$$\text{Volume} = \int_0^{(\sqrt{17}-1)/2} 2\pi x\,(4 - x^2 - x)\,dx = \ldots\ldots$$

4. Serie

Usando il criterio del rapporto è immediato verificare che il raggio di convergenza della serie di potenze è 2/3; inoltre per il criterio di Leibnitz la serie converge in 2/3; non converge invece in -2/3 , perché in questo caso si riduce ad una serie armonica.

Applicando il teorema di derivazione per serie, otteniamo che F' (x) è definita da una serie geometrica :

$$F'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{2^{k-2}}{3^{k-1}} x^{k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3} x \right)^{k-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3} x \right)^{m} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}x} - 1 \right) = \frac{x}{3+2x} \quad .$$

Integrando, si ottiene F (x) = $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \log(3+2x) + c$, Ma essendo F (x) somma della serie di partenza, è facile vedere che F (0).

Questo si ottiene per c = (3 / 4) log3 e dunque F (x) = $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \log\left(1 + \frac{2}{3} x\right)$.