

1.

Risolvere l'equazione differenziale $y' = \frac{y^2}{e^x \sqrt{4 + e^{-x}}}$, precisando gli intervalli in cui sono definite le soluzioni e tracciandone il grafico in qualche caso.

2.

Studiare la funzione $f(x) = \frac{\log|x|}{|x|} - x$.

Il segno della funzione e quello della derivata non possono essere studiati per via algebrica: il primo si può dedurre alla fine dello studio della funzione, l'altro deve essere studiato per via grafica..

Osservato che la funzione $f(x)$ ristretta all'intervallo $x < 0$ è invertibile, calcolare la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y_0 = e + (1/e)$.

3.

Le condizioni $x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ individuano un solido di rotazione di cui si chiede di calcolare il volume.

4.

Determinare il raggio di convergenza R ed il comportamento al bordo della serie di

potenze $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{3^{k-2}}{2^{k-1}} \frac{x^k}{k}$.

Indicata con $F(x)$ la somma della serie (per $|x| < R$), scrivere la serie di potenze che definisce $F'(x)$; calcolare esplicitamente la somma di quest'ultima serie ed utilizzare il risultato ottenuto per determinare l'espressione analitica di $F(x)$.