Soluzioni [A]

1.

C.E. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

SGN positiva per x > 0 , negativa per x ≤ -1 , nulla per x = -1

LIM Per x →-∞ f (x) $\approx 2x \to -\infty$.

Inoltre f (x) – 2 x = $1 - x - \sqrt{x^2 + x} = \dfrac{1-3x}{1 - x + \sqrt{x^2+x}} \approx \dfrac{-3x}{-2x}$ → 3 / 2 ; la retta y = 2 x + 3/2 è asintoto obliquo.

Per x →+∞ f (x) = $\dfrac{1+x}{1+x+\sqrt{x^2+x}} \approx \dfrac{x}{2x} \to \dfrac{1}{2}$; la retta y = ½ è asintoto orizzontale.

DRV f ‘ (x) = $1 - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$, per x ≠0 , x ≠ -1

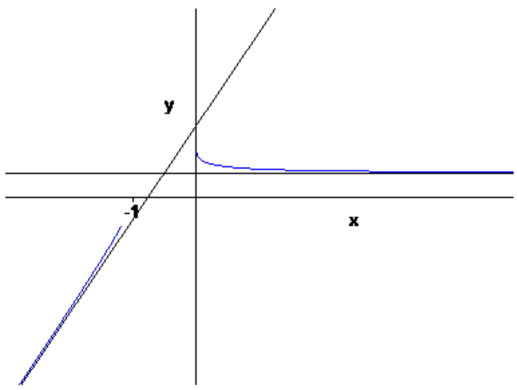
f ‘ (x) ≥ 0 ⇔ $2\sqrt{x^2+x} \geq 2x+1$

Se x < -1 il secondo membro è negativo e dunque la disequazione è verificata. Per x > 0 possiamo elevare al quadrato e trovare che la disequazione non è verificata.

x = 0 e x = 1 sono punti a tangente verticale.

DRV^2 f” (x) = $\dfrac{1}{4(x^2+x)^{3/2}}$

La funzione è convessa.



Per studiare per x→+∞ l’infinitesimo f (x) – ½, poniamo t = 1/x → 0^+.

$$\frac{1 + t/2 - \sqrt{1+t}}{t} = \frac{t^2/8 + o(t^2)}{t} \approx \frac{t}{8}$$

Dunque f (n) – ½ $\approx \dfrac{1}{8n}$ e la serie corrispondente diverge.

2.

f (t)

definita per $t > 0$, $t = 1$

positiva

$t = 0$, $t = 1$ punti di discontinuità eliminabile, inessenziali per l'integrabilità

per $t \to +\infty$ $f(t) \to +\infty$ funzione non integrabile

sì		sì		no
0	+	1	+	+ oo

F (x)

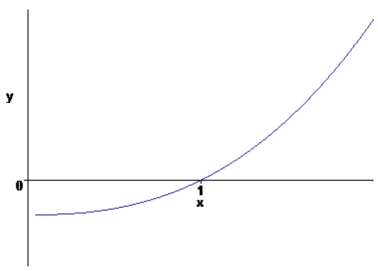
C.E. $x \geq 0$

SGN   positiva per $x > 1$, negativa per $0 \leq x < 1$, nulla per $x = 1$

DRV $F'(x) = f(x)$ sempre positiva

$F'(0) = 0$, $F'(1) = 1$

per $x \to +\infty$ $F(x)/x \approx F'(x) \to +\infty$ non c'è asintoto



3.

$y = 1$ soluzione costante

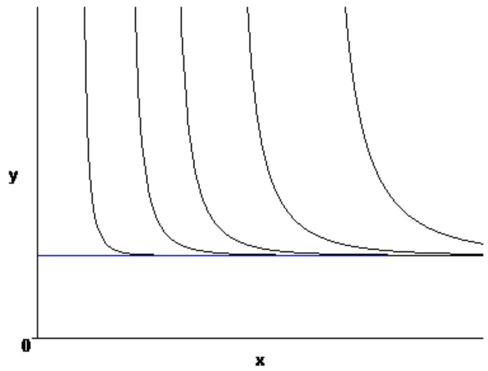
$B(y) = 3(1 - y^2)$, $B'(1) = -6$ Le soluzioni curvilinee non intersecano quella costante

Separando le variabile ed integrando, si trova successivamente:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{3}{x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 3\log x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1} = 3\log x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\frac{y+1}{y-1} = 6\log x + 2c \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = k\,x^6 \quad (k = e^{2c} > 0) \Rightarrow y = \frac{k\,x^6 + 1}{k\,x^6 - 1}$$

Perché le soluzioni verifichino la condizione y > 1 , deve essere x > 1 / $\sqrt[6]{k}$.



La condizione iniziale y (1) = 2 è soddisfatta per k = 3.

Soluzioni [B]

1.

C.E. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

SGN negativa per $x > 0$, positiva per $x \le -1$, nulla per $x = -1$

LIM Per $x \to -\infty$ $f(x) \approx -2x \to +\infty$.

Inoltre $f(x) + 2x = \sqrt{x^2 + x} + x - 1 = \dfrac{3x - 1}{1 - x + \sqrt{x^2 + x}} \approx \dfrac{3x}{-2x} \to -3/2$; la retta $y = -2x - 3/2$ è asintoto obliquo.

Per $x \to +\infty$ $f(x) = \dfrac{-1 - x}{1 + x + \sqrt{x^2 + x}} \approx \dfrac{-x}{2x} \to -\dfrac{1}{2}$; la retta $y = -½$ è asintoto orizzontale.

DRV $f'(x) = -1 + \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$, per $x \neq 0$, $x \neq -1$

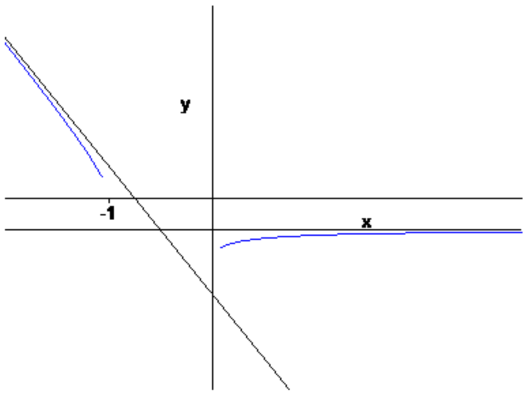
$f'(x) \geq 0 \iff 2\sqrt{x^2 + x} \leq 2x + 1$

Se $x < -1$ il secondo membro è negativo e dunque la disequazione non è verificata. Per $x > 0$ possiamo elevare al quadrato e trovare che la disequazione è verificata.

$x = 0$ e $x = 1$ sono punti a tangente verticale.

DRV^2 $f''(x) = -\dfrac{1}{4(x^2 + x)^{3/2}}$

La funzione è concava.



Per studiare per $x \to +\infty$ l'infinitesimo $f(x) - ½$, poniamo $t = 1/x \to 0^+$.

$$\frac{1 + t/2 - \sqrt{1 + t}}{t} = \frac{t^2/8 + o(t^2)}{t} \approx \frac{t}{8}$$

Dunque $f(n) - ½ \approx \dfrac{1}{8n}$ e la serie corrispondente diverge.

2.

f (t)

definita per t > 0 , t = 1

positiva

t = 0 , t = 1 punti di discontinuità eliminabile, inessenziali per l'integrabilità

per t →+∞   f (t) →+∞ funzione non integrabile

sì		sì		no
0	+	1	+	+ oo

F (x)

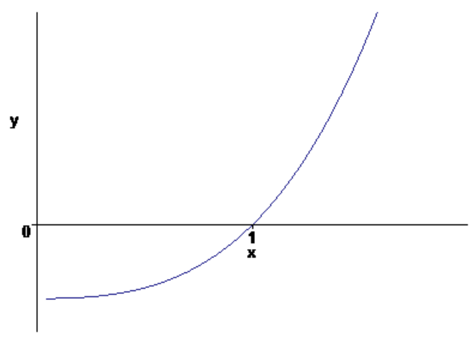
C.E. $x \geq 0$

SGN   positiva per x > 1 , negativa per $0 \leq x < 1$, nulla per x = 1

DRV   F' (x) = f (x) sempre positiva

F' (0) = 0 ,   F' (1) = 2

per x →+∞   F (x) / x   ≈ F ' (x) →+∞ non c'è asintoto



3.

y = -1 soluzione costante

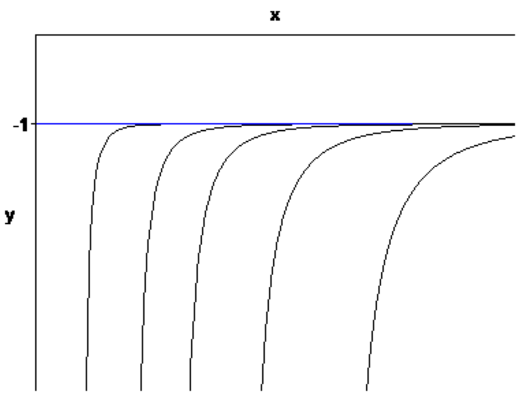
B (y) = 3 (y^2 - 1) , B ' (-1) = -6   Le soluzioni curvilinee non intersecano quella costante

Separando le variabile ed integrando, si trova successivamente:

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{3}{x}\, dx \Rightarrow \frac{1}{2} \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 3\log x + c \Rightarrow \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1} = 3\log x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log\frac{y-1}{y+1} = 6\log x + 2c \ \Rightarrow \ \frac{y-1}{y+1} = k\,x^6 \quad (k = e^{2c} > 0) \ \Rightarrow \ y = \frac{1+k\,x^6}{1-k\,x^6}$$

Perché le soluzioni verifichino la condizione y < -1 , deve essere x > 1 / $\sqrt[6]{k}$.



La condizione iniziale y (1) = -2 è soddisfatta per k = 3.