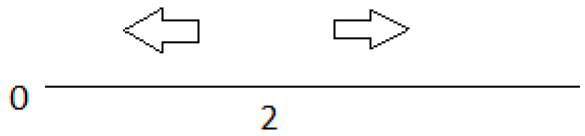
Soluzioni [A]

2.

- La successione è ben definita (questo è ovvio, perché la funzione f (x) è definita su tutto R) e positiva (questo si prova facilmente per induzione).

- $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x_n^2 + x_n) \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq 2$



- Proviamo per induzione che è sempre $x_n < 2$.
  Per n = 1 è vera ($x_1 = 3/8$).
  Supponiamola vera per n e verifichiamola per n+1:
  $\frac{1}{3}(x_n^2 + x_n) < 2 \Leftrightarrow x_n^2 + x_n - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x_n < 2$, vera per l'ipotesi fatta.

- La successione è sempre compresa in [0 , 2] dunque è limitata; inoltre è decrescente e dunque ammette limite (che è anche l'estremo inferiore) che è necessariamente il punto fisso 0.

- In conclusione : sup = max = 3/8 , min non esiste , inf = lim = 0.

- La serie corrispondente verifica la condizione necessaria per la convergenza; inoltre è positiva e possiamo quindi studiarla con il criterio del rapporto:
  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(x_n^2 + x_n)/3}{x_n} \rightarrow 1/3.$
  Il risultato garantisce la convergenza della serie.

3.

- $\frac{\log(2 - \cos x)}{\operatorname{sen} x^2} \approx \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 1/2$

- $\log x_n = \; n \; \log \dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2} \approx n \; \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{2} = n \; \dfrac{e^{(\log 3)/n}-1}{2} = n \; \dfrac{\log 3}{2n} \to \dfrac{\log 3}{2}$

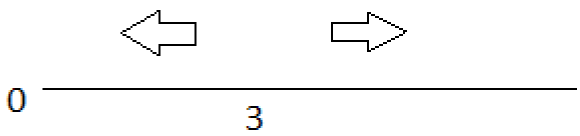
  $x_n \to \sqrt{3}$.

Soluzioni [B]

2.

- La successione è ben definita (questo è ovvio, perché la funzione f (x) è definita su tutto R) e positiva (questo si prova facilmente per induzione).

- $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} (x_n^{\,2} + x_n) \leq x_n \;\Leftrightarrow\; x_n^{\,2} - 3 x_n \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x_n \leq 3$



- Proviamo per induzione che è sempre $x_n > 3$.
  Per n = 1 è vera ($x_1 = 7/2$).
  Supponiamola vera per n e verifichiamola per n+1:
  $\dfrac{1}{4} (x_n^{\,2} + x_n) > 3 \Leftrightarrow x_n^{\,2} + x_n - 12 > 0 \;\Leftrightarrow\; x_n < -4 \;$ opp. $\; x_n > 3$,
  vera per l'ipotesi fatta.

- La successione è sempre compresa in [3 , +∞) ed è crescente: dunque ammette limite (che è anche l'estremo superiore). Non essendoci a destra di 3 punti fissi, il limite è +∞. In particolare la successione non è limitata superiormente.

- In conclusione : sup = +∞, max non esiste , inf = min = 7/2.

- La serie associata alla successione $1 / x_n$ verifica la condizione necessaria per la convergenza; inoltre è positiva e possiamo quindi studiarla con il criterio del rapporto:

$$\frac{1/x_{n+1}}{1/x_n} = \frac{x_n}{(x_n^2 + x_n)/4} \to 0.$$

Il risultato garantisce la convergenza della serie.

3.

- $\dfrac{\log(2 - \cos x)}{x \operatorname{sen} x} \approx \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \to 1/2$
- $\log x_n = n \log \dfrac{1 + \sqrt[n]{3}}{2} \approx n \dfrac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} = n \dfrac{e^{(\log 3)/n} - 1}{2} = n \dfrac{\log 3}{2n} \to \dfrac{\log 3}{2}$

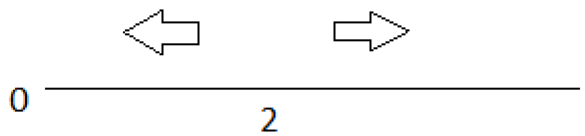
  $x_n \to \sqrt{3}.$

Soluzioni [C]

2.

- La successione è ben definita (questo è ovvio, perché la funzione f (x) è definita su tutto R) e positiva (questo si prova facilmente per induzione).

- $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(x_n^2 + x_n) \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq 2$



- Proviamo per induzione che è sempre $x_n > 2$.

  Per n = 1 è vera ($x_1 = 8/3$).

  Supponiamola vera per n e verifichiamola per n+1:

  $\dfrac{1}{3}(x_n^2 + x_n) > 2 \Leftrightarrow x_n^2 + x_n - 6 > 0 \Leftrightarrow x_n < -3 \text{ opp. } x_n > 2,$

  vera per l'ipotesi fatta.

- La successione è sempre compresa in [2 , +∞) ed è crescente: dunque ammette limite (che è anche l'estremo superiore). Non essendoci a destra di 2 punti fissi, il limite è +∞. In particolare la successione non è limitata superiormente.

- In conclusione : sup = +∞, max non esiste , inf = min = 8/3.

- La serie associata alla successione 1 / x_n verifica la condizione necessaria per la convergenza; inoltre è positiva e possiamo quindi studiarla con il criterio del rapporto:
  $$\frac{1/x_{n+1}}{1/x_n} = \frac{x_n}{(x_n^2 + x_n)/3} \to 0.$$
  Il risultato garantisce la convergenza della serie.

3.

- $$\frac{\log(2-\cos x)}{x \operatorname{tg} x} \approx \frac{1-\cos x}{x^2} \to 1/2$$
- $\log x_n$ = $n \log \dfrac{2+\sqrt[n]{2}}{3} \approx n \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{3} = n \dfrac{e^{(\log 2)/n}-1}{3} = n \dfrac{\log 2}{3n} \to \dfrac{\log 2}{3}$

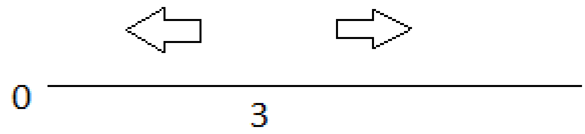
  $x_n \to \sqrt[3]{2}.$

Soluzioni [D]

2.

- La successione è ben definita (questo è ovvio, perché la funzione f (x) è definita su tutto R) e positiva (questo si prova facilmente per induzione).

- $x_{n+1} \le x_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(x_n^2 + x_n) \le x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x_n \le 3$



- Proviamo per induzione che è sempre $x_n < 3$.
  Per n = 1 è vera ($x_1 = 2/7$).
  Supponiamola vera per n e verifichiamola per n+1:
  $\frac{1}{4}(x_n^2 + x_n) < 3 \Leftrightarrow x_n^2 + x_n - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < x_n < 3$, vera per l'ipotesi fatta.

- La successione è sempre compresa in [0 , 3] dunque è limitata; inoltre è decrescente e dunque ammette limite (che è anche l'estremo inferiore) che è necessariamente il punto fisso 0.

- In conclusione : sup = max = 2/7 , min non esiste , inf = lim = 0.

- La serie corrispondente verifica la condizione necessaria per la convergenza; inoltre è positiva e possiamo quindi studiarla con il criterio del rapporto:
  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(x_n^2 + x_n)/4}{x_n} \to 1/4.$
  Il risultato garantisce la convergenza della serie.

3.

- $\frac{\log(2 - \cos x)}{\operatorname{tg} x^2} \approx \frac{1 - \cos x}{x^2} \to 1/2$
- $\log x_n$ = $n \log \frac{3 - \sqrt[n]{3}}{2} \approx n \frac{1 - \sqrt[n]{3}}{2} = n \frac{1 - e^{(\log 3)/n}}{2} = -n \frac{\log 3}{2n} \to -\frac{\log 3}{2}$
  $x_n \to 1/\sqrt{3}.$