Soluzioni

1.

C.E. $\quad x \in (0, \pi/2)$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

SLZ COSTANTI $\quad y = \pm \pi/2$

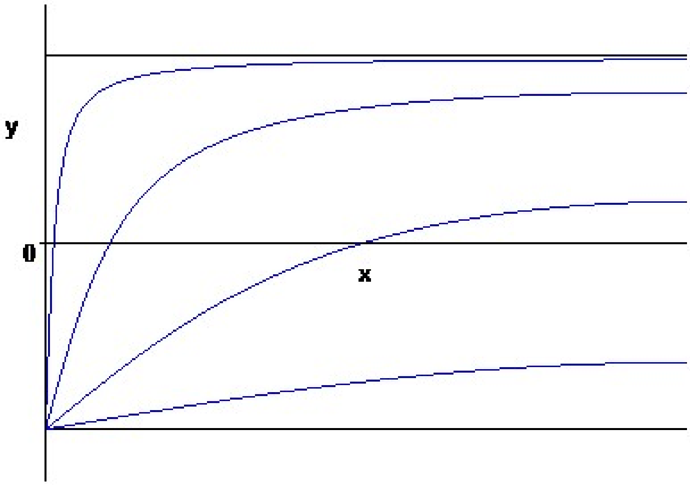
UNICITA' $\quad B(y) = \cos y$, $B'(y) = -\operatorname{sen} y$; la derivata esiste continua in un intorno di $\pm \pi/2$; le soluzioni non costanti non intersecano quelle costanti (né si intersecano tra loro) nel C.E.

RISOLUZIONE

$$\int \frac{dy}{\cos y} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \frac{1}{2} \log \frac{1+\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y} = \log \operatorname{sen} x + c \Rightarrow \frac{1+\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y} = k \operatorname{sen}^2 x \quad (k>0) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{k \operatorname{sen}^2 x - 1}{k \operatorname{sen}^2 x + 1} \Rightarrow y = \operatorname{arcsen} \frac{k \operatorname{sen}^2 x - 1}{k \operatorname{sen}^2 x + 1}$$

La condizione $\left| \frac{k \operatorname{sen}^2 x - 1}{k \operatorname{sen}^2 x + 1} \right| < 1$ è sempre verificata; dunque le soluzioni sono definite in $(0, \pi/2)$.



Per $x \to \pi/2$ $\quad y' \to 0$ (si trova direttamente dall'equazione)

Per $x \to 0$ l'equazione fornisce una forma 0/0. Per calcolare il limite possiamo procedere nel seguente modo: $\cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{k \operatorname{sen}^2 x - 1}{k \operatorname{sen}^2 x + 1} \right)^2} = \frac{2\sqrt{k} \operatorname{sen} x}{k \operatorname{sen}^2 x + 1} \approx 2\sqrt{k}\, x$; $y' \to 2\sqrt{k}$, cioè ogni soluzione parte con una tangente diversa.

2.

SIMM funzione pari; si studia per $x \geq 0$

C.E. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ -1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

SGN sempre positiva

LIM $f(0) = \pi/4$; per $x \to +\infty$ $f(x) \approx 1/x \to 0$

DRV $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(1 - x)}{x^2 - 2x + 2}$ $(x \neq 1)$

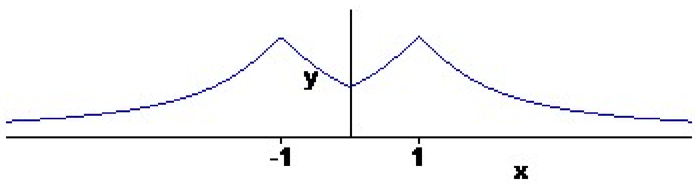
positiva per $x < 1$, negativa per $x > 1$

$x = 1$ punto angoloso

DRV² $f''(x) = \dfrac{2|x - 1|}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

sempre positiva

GRAFICO



3.

Poiché $x^4 + x^2 + 1 \neq 0$ (posto $x^2 = t$, $t^2 + t + 1 > 0$ perché $\Delta < 0$) , l'integrale è improprio solo a causa degli estremi .

Per $x \to +\infty$ $f(x) \approx -\dfrac{1}{x^{4+\alpha}}$, integrabile se $4 + \alpha > 1$, cioè se $\alpha > -3$.

Per $x \to 0$ $f(x) \approx -\dfrac{1}{x^{\alpha - 2}}$, integrabile se $\alpha - 2 < 1$, cioè se $\alpha < 3$.

In conclusione, l'integrale esiste per $-3 < \alpha < 3$.