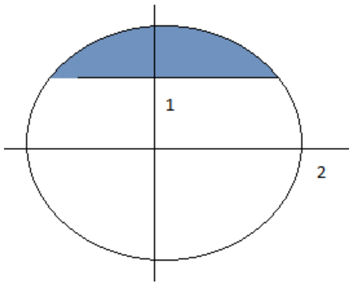
Seconda parte [A] – Soluzioni

1.

Data la simmetria, possiamo limitarci a considerare la parte di regione situata nel primo quadrante e moltiplicare per 2 il valore che si ottiene. Anche per quanto riguarda il volume facciamo ruotare attorno all'asse delle y questa parte.



- Calcolo dell'area: primo metodo (la regione è vista come dominio normale all'asse x)

A / 2 = $\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - 1 \right) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx - \sqrt{3}$.

Nell'integrale poniamo x = 2 sent , ottenendo $4 \int_0^{\pi/3} \cos^2 t\, dt = 2\left[t + \mathrm{sent}\cos t \right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'area A vale dunque $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

- Calcolo dell'area: secondo metodo (la regione è vista come dominio normale all'asse y)

A / 2 = $\int_1^2 \sqrt{4-y^2}\, dy$.

Poniamo y = 2 sent , ottenendo : $4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\left[t + \mathrm{sent}\cos t \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Per l'area A ritroviamo così il risultato precedente.

- Calcolo del volume : primo metodo (metodo delle sezioni con piani perpendicolari all'asse y)

V = $\pi \int_1^2 (4-y^2)\, dy = \pi \left[4y - y^3/3 \right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi$.

- Calcolo del volume : secondo metodo (metodo dei gusci cilindrici attorno all'asse y)

V = $2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x\,(\sqrt{4-x^2} - 1)\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x\, \sqrt{4-x^2}\, dx - 3\pi$.

Calcoliamo l'integrale per sostituzione, ponendo $4 - x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$. In questo modo si ottiene:

$$\pi \int_1^4 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\pi \left[t^{3/2} \right]_1^4 = \frac{14}{3}\pi ,$$

ritrovando in conclusione il risultato precedente.

2.

C.E. Deve essere $| 4x / (4 + x^2) | \leq 1 \leftrightarrow x^2 - 4 | x | + 4 \geq 0 \leftrightarrow (| x | - 2)^2 \geq 0$ che è sempre verificata.

Poiché l'argomento dell'arcocoseno è dispari, il grafico della funzione è simmetrico rispetto al punto $(0 , \pi/2)$.

SGN La funzione è sempre positiva; si annulla per $x = 2$

LIM Per $x \to \pm\infty$ $f (x) \to \pi/2$ asintoto orizzontale ; $f (2) = 0$, $f (-2) = \pi$

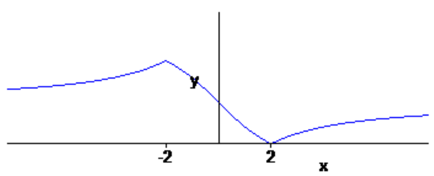
DRV $f'(x) = -4 \dfrac{\mathrm{sgn}(4 - x^2)}{4 + x^2}$; $x = \pm 2$ punti angolosi

funzione crescente per $x \leq -2$ e per $x \geq 2$, decrescente per $-2 \leq x \leq 2$

$x = -2$ punto di massimo assoluto; $x = 2$ di minimo assoluto

DRV^2 $f''(x) = 8x \dfrac{\mathrm{sgn}(4 - x^2)}{(4 + x^2)^2}$

funzione convessa per $x \leq -2$ e per $0 \leq x \leq 2$, concava per $-2 \leq x \leq 0$ e per $x \geq 2$; 0 , ± 2 punti di flesso



La funzione è invertibile nell'intervallo $[-2 , 2]$; questa restrizione ha ancora l'intervallo $[0 , \pi]$ come immagine. Per trovare l'inversa, risolviamo l'equazione $\arccos (4x / (4 + x^2)) = k \leftrightarrow 4x / (4 + x^2) = \cos k \leftrightarrow (\cos k) x^2 - 4x + 4 \cos k = 0 \leftrightarrow x = 2 (1 \pm \mathrm{sen}\, k) / \cos k$. La soluzione corretta è quella con il segno – davanti a senk.

Infatti deve essere $| 2 (1 \pm \mathrm{sen}\, k) / \cos k | \leq 2$. Elevando al quadrato e scrivendo $\cos^2 k$ come $1 - \mathrm{sen}^2 k$, questo equivale a $\mathrm{sen}\, k (\mathrm{sen}\, k \pm 1) \leq 0$. Essendo $0 \leq k \leq \pi$, il segno da scegliere è quello negativo.

Dobbiamo provare se esiste finito l'integrale improprio $\int_{2}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4\,x}{4+x^2} \right) dx$, ovvero – tenendo conto del legame tra arcoseno e arcoseno - $\int_{2}^{+\infty} \operatorname{arcsen} \frac{4\,x}{4+x^2}\ dx$.

La risposta è negativa perché per x →+∞ la funzione ha parte principale 4 / x.

3.

La serie è a segno positivo.

Per a = 0 il termine generale è infinito e dunque la serie diverge.

Per a > 0 applichiamo il criterio della radice, trovando 2 / a come limite.

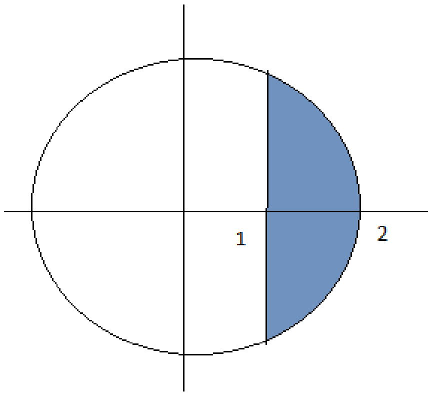
Quindi, se 0 < a < 2 la serie diverge, se a > 2 converge.

Per a = 2 , $x_n = \frac{\exp\left(n \log \frac{3+2\,n}{1+2\,n} \right)}{n^2} \approx \frac{\exp\left(\frac{2\,n}{1+2\,n} \right)}{n^2} \approx \frac{e}{n^2}$ e la serie converge.

Seconda parte [B] – Soluzioni

1.

Data la simmetria, possiamo limitarci a considerare la parte di regione situata nel primo quadrante e moltiplicare per 2 il valore che si ottiene. Lo stesso facciamo per trovare il volume del solido di rotazione.



- Calcolo dell'area: primo metodo (la regione è vista come dominio normale all'asse x)

A / 2 = $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Poniamo x = 2 sent , ottenendo : $4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2\left[\,t + \text{sent}\cos t\,\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'area A vale dunque $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

- Calcolo dell'area: secondo metodo (la regione è vista come dominio normale all'asse y)

A / 2 = $\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - 1 \right) dy = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\,dy - \sqrt{3}$.

Nell'integrale poniamo y = 2 sent , ottenendo $4\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,dt = 2\left[\,t + \text{sent}\cos t\,\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ritroviamo così il risultato precedente.

- Calcolo del volume : primo metodo (metodo delle sezioni con piani perpendicolari all'asse y)

V/2 = $\pi \int_0^{\sqrt{3}} ((4-y^2)-1)\,dx = 2\sqrt{3}\,\pi$.

- Calcolo del volume : secondo metodo (metodo dei gusci cilindrici attorno all'asse y)

V/2 = $2\pi \int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \pi\int_0^3 \sqrt{t}\,dt = 2\sqrt{3}\pi$.

Abbiamo calcolato l'integrale per sostituzione, ponendo $4 - x^2 = t$, $- 2x\,dx = dt$.

ritrovando in conclusione il risultato precedente.

2.

C.E. Deve essere $| 2x / (1 + x^2)| \le 1 \leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 \ge 0 \leftrightarrow (|x| - 1)^2 \ge 0$ che è sempre verificata.

Poiché l'argomento dell'arcocoseno è dispari, il grafico della funzione è simmetrico rispetto al punto $(0 , \pi/2)$.

SGN La funzione è sempre positiva; si annulla per $x = 1$

LIM Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pi/2$ asintoto orizzontale ; $f(1) = 0$, $f(-1) = \pi$

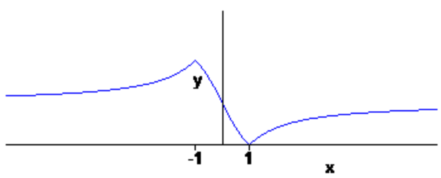
DRV $f'(x) = -2\dfrac{\text{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$; $x = \pm 1$ punti angolosi

funzione crescente per $x \le -1$ e per $x \ge 1$, decrescente per $-1 \le x \le 1$

$x = -1$ punto di massimo assoluto; $x = 1$ di minimo assoluto

DRV² $f''(x) = 4x\dfrac{\text{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

funzione convessa per $x \le -1$ e per $0 \le x \le 1$, concava per $-1 \le x \le 0$ e per $x \ge 1$; 0 , ± 1 punti di flesso



La funzione è invertibile nell'intervallo [-1 , 1]; questa restrizione ha ancora l'intervallo [0 , π] come immagine. Per trovare l'inversa, risolviamo l'equazione $\arccos(2x / (1 + x^2)) = k \leftrightarrow 2x / (1 + x^2) = \cos k \leftrightarrow (\cos k)\,x^2 - 2x + \cos k = 0 \leftrightarrow x = (1 \pm \operatorname{sen} k) / \cos k$. La soluzione corretta è quella con il segno – davanti a senk.

Infatti deve essere $|(1 \pm \operatorname{sen} k) / \cos k| \le 1$. Elevando al quadrato e scrivendo $\cos^2 k$ come $1 - \operatorname{sen}^2 k$, questo equivale a $\operatorname{sen} k(\operatorname{sen} k \pm 1) \le 0$. Essendo $0 \le k \le \pi$, il segno da scegliere è quello negativo.

Dobbiamo provare se esiste finito l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2\,x}{1+x^2} \right) dx$, ovvero – tenendo conto del legame tra arcoseno e arcoseno - $\int_2^{+\infty} \operatorname{arcsen} \frac{2\,x}{1+x^2}\ dx$.

La risposta è negativa perché per $x \to +\infty$ la funzione ha parte principale 2 / x.

3.

La serie è a segno positivo.

Applichiamo il criterio della radice, trovando a / 3 come limite.

Quindi, se 0 < a < 3 la serie converge, se a > 3 diverge.

Per a = 3 , $x_n = \frac{\exp\left(n \log \frac{1+3\,n}{2+3\,n} \right)}{n^2} \approx \frac{\exp\left(- \frac{n}{2+3\,n} \right)}{n^2} \approx \frac{\exp(-1/3)}{n^2}$ e la serie converge.