Soluzioni

1. Per $x \to 2$ $f(x)$ è un infinito di ordine $1/2$, $f^2(x)$ un infinito di ordine 1. Dunque il primo integrale esiste, il secondo (quello legato al volume del solido di rotazione) no.

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\, dx =$$

$$\sqrt{\frac{x}{2-x}} = t \Rightarrow x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{4t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\, dt \underset{\text{HERMITE}}{=} \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+t^2} + \left(\frac{-2t}{1+t^2} \right)' \right) dt =$$

$$= \left[2 \operatorname{arctg} t - \frac{2t}{1+t^2} \right]_0^\infty = \pi$$

Si può procedere anche in questo modo:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2, \quad dx = 2t\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^2}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$$

$$t = \sqrt{2}\, \mathrm{sen}\,\vartheta, \quad dt = \sqrt{2}\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\, \mathrm{sen}^2\vartheta\, d\vartheta = 4 \left[\frac{\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

O anche:

$$\sqrt{2-x} = t \Rightarrow x = 2 - t^2, \quad dx = -2t\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2-t^2}\, dt$$

$$t = \sqrt{2}\, \mathrm{sen}\,\vartheta, \quad dt = \sqrt{2}\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta\, d\vartheta = 4 \left[\frac{\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

2. Il polinomio caratteristico k^2+1 ha come radici $k = \pm i$, a cui corrispondono le soluzioni $\cos x$, $\mathrm{sen}\, x$ per l'equazione omogenea ($\Rightarrow v_0 = c_1 \cos x + c_2\, \mathrm{sen}\, x$).
Se $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ passiamo in campo complesso all'eq. $z'' + z = e^{i\alpha x}$ e cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{z} = A e^{i\alpha x}$. Con i calcoli consueti si trova $A = 1/_{1-\alpha^2}$. Una soluzione reale è dunque $\bar{y} = \mathrm{Im}\,\bar{z} = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha x}{1-\alpha^2}$.

Se $\alpha = 1$, cerchiamo una soluzione $\bar{z} = A x e^{ix}$; si trova che deve essere $A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ e dunque $\bar{y} = \operatorname{Im} \bar{z} = -\frac{1}{2} x \cos x$.

3.

$\frac{n \lg n}{n^2+1} \sim \frac{\lg n}{n} > \frac{1}{n}$: la serie non converge assolutamente.

Per studiare la convergenza semplice, usiamo il teorema di Leibniz. Abbiamo già visto che $\frac{n \lg n}{n^2+1}$ è infinitesima; rimane da provare che è decrescente (almeno definitivamente). Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x \lg x}{x^2+1}$ e calcoliamone la derivata $f'(x) = \frac{1 - x^2 \lg x + x^2 + \lg x}{(x^2+1)^2}$.

Il denominatore è positivo; il numeratore – per $x \to +\infty$ – si approssima con $-x^2 \lg x$. Dunque – almeno per le $x \gg 1$ – risulta $f'(x) < 0$, che è quanto volevamo provare.

#