CdS in Informatica

Prova di verifica di ANALISI MATEMATICA A

3.11.2011

1. Sia dato l'insieme $X = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = \dfrac{3n-2}{2n}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$: 10punti
    a. determinare $l = \inf X$ e $L = \sup X$ e farne la verifica;
    b. esistono min X e max X?
    c. X è chiuso?

2. Determinare il campo di esistenza X della legge $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x}$ 5punti

3. Verificare che $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0$ 7punti

4. Sia data la funzione f definita in $X = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ dalla legge $f(x) = \dfrac{4x+3}{x}$; 10punti
    a. studiare crescenza e decrescenza di f
    b. determinare l'immagine f(X)
    c. dire se $f: X \to f(X)$ è invertibile e, nel caso, determinarne la funzione inversa.

① a) Sia $a_n = X = \frac{3n-2}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

1) $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}$ è maggiorante di X

Sia $\varepsilon > 0$; dobbiamo trovare $\underline{n}$ tale che

$a_n > \frac{3}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{n} > \frac{3}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{n} > -\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sup X = \frac{3}{2} = L$

2) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_n - \frac{1}{2} = \frac{3n-2}{2n} - \frac{1}{2} = \frac{3n-2-n}{2n} = \frac{2(n-1)}{2n} =$

$= \frac{n-1}{n} \geqq 0$ perchè $n > 0$ e $n \geqq 1 \Rightarrow n-1 \geqq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \Rightarrow a_n \geqq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow I = \inf X = \frac{1}{2}$ (perchè $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$)

b) $I = \inf X = \frac{1}{2} = a_1 \in X \Rightarrow \min X = \frac{1}{2}$

$L = \sup X = \frac{3}{2} \notin X$ perchè $a_n < \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \Rightarrow$

max X non esiste

c) X non è chiuso perchè non esiste max X

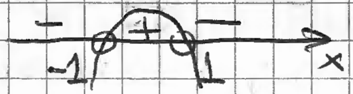
(o $\sup X \notin X$)

② CE: $\begin{cases} x^2 - x^4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2(1-x^2) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (perché $x^2 \geq 0 \; \forall x$) $\iff$

$\iff \begin{cases} x \in [-1;1] \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in [-1;0) \cup (0;1]$

$1 - x^2 \geq 0$

$x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$



$x \in [-1;1]$

③ Occorre stimare la quantità

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right| = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x^2|} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{x^2}$$

$x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x^2| = x^2$

Invece di risolvere la disequazione

$\frac{|x-1| \cdot |x+1|}{x^2} < \varepsilon$, si può osservare che,

per ogni x appartenente all'intorno di $x_0 = 1$

di ampiezza $\frac{1}{2}$, risulta $x > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$x^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{1/4} = 4$

$x < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x+1 < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow |x+1| < \frac{5}{2}$;

perciò

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| = \frac{|x-1||x+1|}{x^2} < |x-1| \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 = 10 \cdot |x-1|$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x-1| < \frac{1}{2}$. Fissato $\varepsilon > 0$

e posto $\delta = \min\left[\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{10}\right]$, risulta

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| < 10 \cdot |x-1| < 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| < \delta$$

4 a) CE di $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$

Sia $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{4x_2+3}{x_2} - \frac{4x_1+3}{x_1} = 4 + \frac{3}{x_2} - 4 - \frac{3}{x_1} =$$

$$= \frac{3x_1 - 3x_2}{x_1 x_2} = \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0 \text{ perchè}$$

$x_1 x_2 > 0$ e $3(x_1 - x_2) < 0$

$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x)$ decresce strettamente per $\forall x \in (0; +\infty)$

b) L'imaggine di $f(x)$ è $Y = \{y;\ \exists x > 0,\ y = \frac{4x+3}{x}\}$

Sia $y \in Y \Rightarrow y = 4 + \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{3}{x} = y - 4$

Se $y - 4 \neq 0$, $y \neq 4 \Rightarrow x = \frac{3}{y-4}$ (1)

ma $x > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y-4} > 0 \Leftrightarrow y - 4 > 0 \Leftrightarrow y > 4$

$\Rightarrow$ L'imagine di $f(x)$ è $Y = (4; +\infty)$

c) 1) $f(x)$ è strettamende decrescente $\Rightarrow$ $f(x)$ è iniettiva (punto a)

2) ie b) implica $f: x \in (0; +\infty) \to y = f(x) \in (4, +\infty)$ è surjettiva

Secondo 1) e 2) $\Rightarrow f(x)$ è invertibile e la sua inversa è $x = \frac{3}{y-4}$ (secondo (1))