Soluzioni

1.

1. Per $x \to 0$ $f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ infinito di ordine $1/2$
   Si pone $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$
   $y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[2 \arcsin t\right]_0^1 = \pi$

2. Per $x \to 0$ $f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ infinito di ordine $1/2$
   Si pone $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\, dx = dt$
   $y = \int_0^1 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 (t^{1/2} + t^{-1/2})\,dt = \left[2\sqrt{t} + \frac{2}{3} t\sqrt{t}\right]_0^1 = 8/3$

3. Per $x \to 0$ $\left|\frac{\lg x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}$. Scegliendo $\alpha > 0$ t.c. $\alpha + 1/2 < 1$, così $0 < \alpha < 1/2$, si conclude per confronto che l'integrale esiste.
   Si integra per parti.
   $\int \frac{\lg x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\lg x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\lg x - 4\sqrt{x} + c$
   L'integrale vale $-2\sqrt{e}$.

4. Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim 1/x^2$ infinitesimo di ordine 2.
   $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$
   $y = 2\pi/\sqrt{3}$.

5. Per $x \to +\infty$ $f(x) \sim e^x/e^{2x} = 1/e^x < 1/x^\alpha$. Scelto $\alpha > 1$ si ottiene la verifica dell'integrabilità.
   Si pone $e^x = t$, $e^x dx = dt$.
   $\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2 - t - 2} = \frac{1}{3} \lg\left|\frac{t-2}{t+1}\right| + c = \frac{1}{3} \lg \frac{|e^x - 2|}{e^x + 1} + c$
   $y = \lg 4/3$

6. Per $x \to +\infty$ $f(x) \sim 1/x^2$, per $x \to 1$ $f(x) \sim 1/\sqrt{2(x-1)}$
   Si pone $x^2 - 1 = t$ e poi $\sqrt{t} = z$.
   $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c$
   $y = \pi/2$

7. Per $x \to 0$ $f(x) \sim -1/4\sqrt{|x|}$.
   Si calcolano separatamente $\int_0^1 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{-x}}$.
   nel primo caso si pone $x = t^2$.
   $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \int \frac{2}{t^2-4}\,dt = \frac{1}{2} \lg\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = \frac{1}{2} \lg\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|$
   $\int_0^1 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{3}$
   nel secondo caso si pone $x = -t^2$.
   $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{-x}} = \int \frac{2}{t^2+4}\,dt = \operatorname{artg}\frac{t}{2} = \operatorname{artg}\frac{\sqrt{-x}}{2}$
   $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{-x}} = -\operatorname{artg}\frac{1}{2}$.

8. Per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \dfrac{1}{2x}$

$f(x) \sim 1/4x^2$

$$\int (2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} = \frac{2x^3+3x-2(x^2+1)^{3/2}}{3} =$$

$$= \frac{-3x^2-4}{3(2x^3+3x+2(x^2+1)^{3/2})} \sim \frac{-3x^2}{12x^3} \to 0$$

9. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim 1/x^3$

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \lg\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}$$

$y = -\lg 2 + 1$

10. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim 1/e^x < 1/x^\alpha$. Si sceglie $\alpha > 1$.

Si pone $e^x = t$.

$$\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t-1}{t(t^2+1)}\,dt = \operatorname{arctg} t + \lg\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}$$

$y = \pi/4 - \lg\sqrt{2}$

2.

1. Per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim x \lg x \to 0$, discontinuità eliminabile

Per $x \to 1$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x-1}{4\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{1-x}$, discont. eliminabile

L'integrale esiste in senso proprio.

2. Per $x \to 1$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ infinitesimo di ordine 1/2

Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) > \dfrac{1}{x^{\alpha/2}}$; prendiamo $\alpha < 2$. L'integr. non esiste.

3. Per $x \to +\infty$ $\quad |f(x)| \leq 1/x^2$. La fz. è assolutamente integrabile e quindi anche integrabile.

4. Per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ infinitesimo di ordine 1/2

Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) < \dfrac{1}{x^\alpha \cdot x^{1/2}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}$. Si sceglie α: $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$

5. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\pi/2}{x^3}$ infinitesimo di ordine 3.

Per $x \to 0$ $\quad f(x) \to 1$ discontinuità eliminabile

6. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\lg x}{x^2} \leq \dfrac{x^\alpha}{x^2} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{2-\alpha}$. Si sceglie $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.

7. Per $x \to 1$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{|x-1|^{1/2}}$ infinito di ordine 1/2

Per $x \to 0$ $\quad f(x) > \dfrac{x^\alpha}{x^2} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{2-\alpha}$. Si sceglie $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.

L'integrale non esiste.

8. Per $x \to 0$ $\quad f(x) \sim 1/x$. L'integrale non esiste.

9. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \dfrac{1}{2x}$. L'integrale non esiste.

10. Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to 0$. Per studiare l'ordine di infinitesimo, cerchiamo $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x^\alpha}} = k \in R - 0$$

Applicando l'Hôpital:

$$\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}} \sim \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}.$$ Deve essere $\alpha = 1$.

L'integrale non esiste.