ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE

1. Utilizzando la formula di Taylor, calcolare il limite per $x \to 0$ delle seguente funzioni (a fianco la risposta)

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\log(1+x^2)} \right) \frac{x}{1 - \cos x} \to -1 \qquad \left(\frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x \operatorname{sen} x} \right)^{1/x^2} \to e^{1/6}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos x}{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)} \to -1/2 \qquad \frac{e^{x+x^2} - e^{x\cos x}}{\log \cos x} \to -2$$

$$\frac{\log^2(1+x) - e^{x^2} + \sqrt{1+x^4} + x^3}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x} \to 11/4 \qquad \frac{(\cos x)^{1/x^2} - e^{-1/2}}{x^2} \to -\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

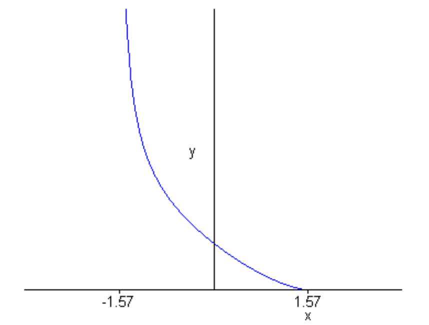
$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{sen} x - \dfrac{2}{3} x^3}{x^5} \to 11/30$$

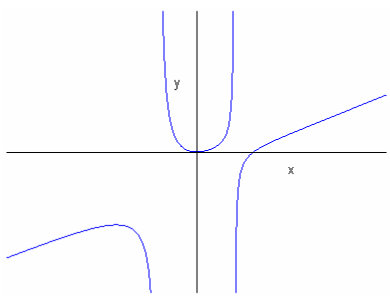
2. Studiare le principali proprietà delle seguenti funzioni e tracciarne il grafico :

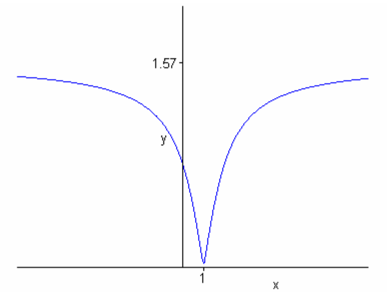
$$\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}} \;,\; x \in [0, \pi] \qquad \frac{x^2 (x-3)}{x^2 - 4}$$

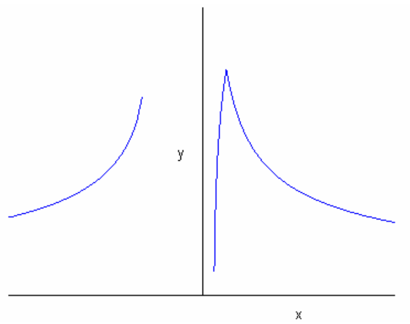
$$\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \qquad \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{|2x-1|}{x^2}}$$

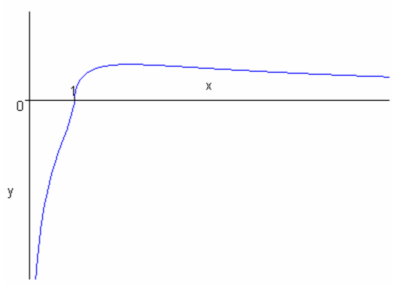
$$\frac{\log x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$$











3.

3.1 Valutare l'errore che si commette approssimando sen 5^0 con il polinomio di taylor di punto iniziale 0 e grado 3 .
Sugg.: $5^0 = \pi / 36$ rad ~ 0,08726646

3.2 Valutare l'errore che si commette approssimando log ((1 + x) / (1 – x)) con 2x nell'intervallo [0 , 1 / 5] .
Sugg.: il polinomio dato costituisce l'approssimazione al <u>secondo</u> ordine (la derivata seconda si annulla nel punto iniziale) .

3.3 Approssimare sen ($\pi / 7$) con un errore minore di 10^{-3} .

4. Studiare le seguenti disequazioni

4.1 $x^3 + 2x^2 - x - 8 > 0$ (R.: $x > \alpha \sim 1{,}4$)

4.2 $\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > \frac{1}{x}$ (R.: $x > \alpha \sim 0{,}6$, $x \neq 1$)

4.1 $(2 - x)\, e^x - 1 > 0$ (R.: $\alpha \sim -1{,}2 < x < \beta \sim 1{,}8$)

5.

5.1 Provare che tra tutti i numeri reali positivi x , y di somma k assegnata , il prodotto $x^\alpha\, y^\beta$ (con $\alpha , \beta > 0$) è massimo quando x e y sono proporzionali ad α e β (cioè $x / \alpha = y / \beta$) .

5.2 Trovare la minima distanza del punto $P = (a , 0)$ (con $a > 0$) dai punti della curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Sugg.: basta considerare i punti nel primo quadrante .
(R.: se $a > 2$, $x = a / 2$; se $a \leq 2$, $x = 1$) .

5.3 Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio R , trovare quello di volume massimo . Sugg.: indicare con x la distanza del centro O della sfera da una delle due basi del cilindro .
(R.: $x = r / \sqrt{3}$, se r è il raggio della sfera) .