Prova scritta del 14.9.2021 – Parte seconda [A]

1.

C.E. R

Infatti deve essere $2x^2+2x+1>0$, $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\le 1$.

La prima disequazione è sempre verificata; la seconda – elevando al quadrato – equivale a

$x^2+2x+1 \le 2x^2+2x+1$ ed anche questa è sempre verificata.

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

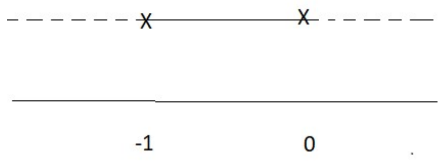
Per x →∞ f (x) → π/4 ; asintoto orizzontale in entrambe le direzioni.

La funzione è sempre positiva; in particolare la sua immagine è contenuta in [0 , π/2].

f (-1) = 0 , f (0) = π/2

DRV

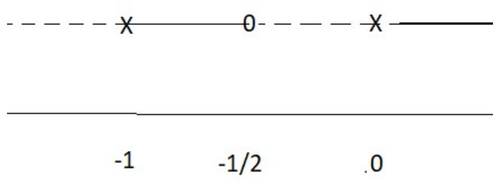
$$f'(x) = -\operatorname{sgn}x\ \operatorname{sgn}(x+1)\ \frac{1}{2x^2+2x+1}$$



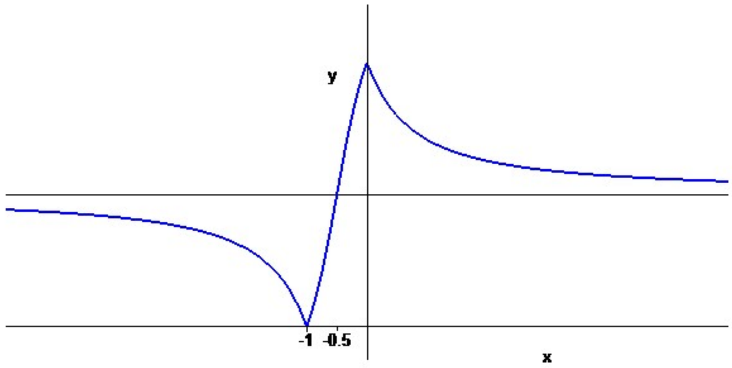
-1 punto di minimo, 0 punto di massimo; entrambi punti angolosi

DRV^2

$$f''(x) = 2\operatorname{sgn}x\ \operatorname{sgn}(x+1)\ \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2}$$



-1 , -1/2 , 0 punti di flesso



2.

C.E. $x \in R$, $y \neq 0$

Nessuna soluzione costante

Se $y(x)$ è soluzione, anche $-y(x)$ lo è. Possiamo quindi limitarci a studiare le soluzioni positive.

$$\int y\, e^{-y^2} dy = \int e^x\, dx \iff -\frac{e^{-y^2}}{2} = e^x - c \iff e^{-y^2} = 2(c - e^x) \iff y^2 = \log\frac{1}{2(c - e^x)} \iff y = \sqrt{\log\frac{1}{2(c - e^x)}}$$

(Abbiamo considerato le soluzioni positive).

Perché i calcoli fatti abbiano senso, deve essere $0 < c - e^x < ½$ cioè $c - ½ < e^x < c$. Deve dunque essere $c > 0$. Risolvendo il sistema delle due disequazioni, si trova :

se $c > ½$ $\log(c - ½) < x < \log c$

se $0 < c \leq ½$ $x < \log c$

3.

Studio di $f(t)$

La funzione tgt / t ha una discontinuità eliminabile in $t = 0$ (il limite vale 1) e dunque è integrabile in un intorno di 0; questo permette la scelta di 0 come estremo di integrazione.

f (t) non è integrabile in nessun intorno di π/2 (e di –π/2 , data la simmetria). Infatti per t →π/2 f (t) $\cong \dfrac{2}{\pi \cos t}$. Posto s = t – π/2 → 0 , $\dfrac{1}{\cos t} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} s} \approx -\dfrac{1}{s}$; f (t) è dunque un infinito di ordine 1 e quindi non integrabile.

In (-π/2 , π/2) f (t) è positiva.

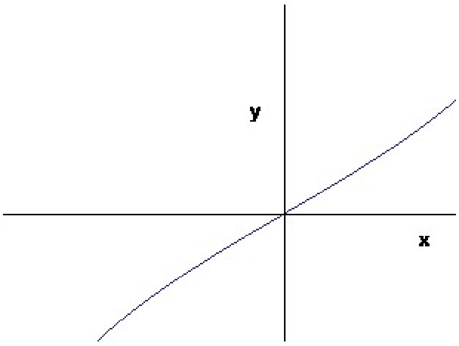
Studio di F (x)

CE (-π/2 , π/2)

SGN positiva in (0 , π/2) , negativa in (-π/2 , 0) , nulla per x = 0

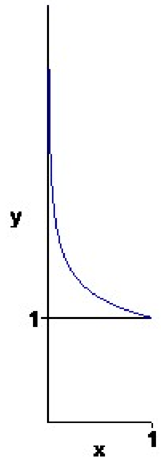
DRV F’ (x) = tgx / x , sempre positiva nel CE

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt \overset{s=-t}{=\!=\!=} -\int_0^{x} \frac{\operatorname{tg} s}{s}\,ds = -F(x)$$



$$F(x) = \int_0^{x} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt \approx \int_0^{x} \left(1+\frac{t^2}{3}\right) dt = x + \frac{x^3}{9}$$ che in 0 ha un flesso.

4. SOLO PER ESAME DA 9 CREDITI



$$V = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) dx = \int_0^1 2\pi \left(x^{2/3} - x \right) dx = 2\pi \left[\frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{y^6} \, dy = \pi \left[- \frac{1}{5 y^5} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{5}$$

4. SOLO PER ESAME DA 12 CREDITI

$$n^{\alpha} \log \frac{n^2}{n^2+1} \approx n^{\alpha} \left(\frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right) = - \frac{n^{\alpha}}{n^2+1} \approx - \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

La serie converge se $2 - \alpha > 1$, cioè se $\alpha < 1$.

Prova scritta del 14.9.2021 – Parte seconda [B]

1.

C.E. R

Infatti deve essere $2x^2 - 2x + 1 > 0$, $\frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \le 1$.

La prima disequazione è sempre verificata; la seconda – elevando al quadrato – equivale a

$x^2 - 2x + 1 \le 2x^2 - 2x + 1$ ed anche questa è sempre verificata.

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

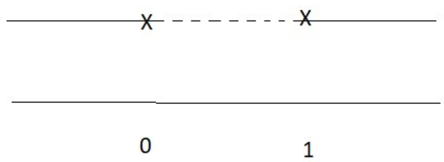
Per $x \to \infty$ $f(x) \to \pi/4$; asintoto orizzontale in entrambe le direzioni.

La funzione è sempre positiva; in particolare la sua immagine è contenuta in $[0, \pi/2]$.

$f(1) = 0$, $f(0) = \pi/2$

DRV

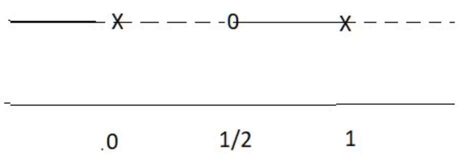
$$f'(x) = \operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x-1) \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$



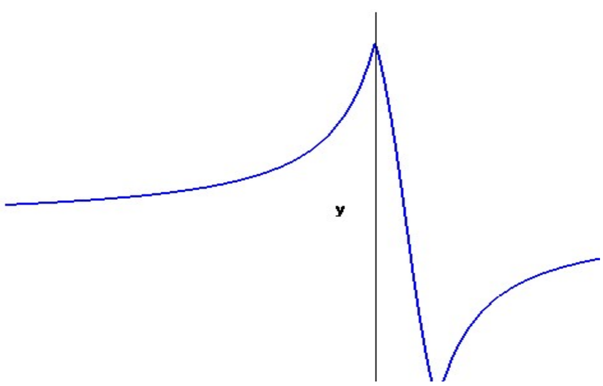
1 punto di minimo, 0 punto di massimo; entrambi punti angolosi

DRV^2

$$f''(x) = -2 \operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x-1) \frac{2x-1}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$



0 , 1/2 , 1 punti di flesso



2.

C.E. $x \in R$, $y \neq 0$

Nessuna soluzione costante

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è. Possiamo quindi limitarci a studiare le soluzioni positive.

$$\int y e^{-y^2} dy = \int e^{-x}\, dx \Leftrightarrow -\frac{e^{-y^2}}{2} = c - e^{-x} \Leftrightarrow e^{-y^2} = 2(e^{-x} - c) \Leftrightarrow y^2 = \log\frac{1}{2(e^{-x} - c)} \Leftrightarrow y = \sqrt{\log\frac{1}{2(e^{-x} - c)}}$$

(Abbiamo considerato le soluzioni positive).

Perché i calcoli fatti abbiano senso, deve essere $0 < e^{-x} - c < ½$ cioè $c < e^{-x} < c - ½$. Deve dunque essere $c > -1/2$. Risolvendo il sistema delle due disequazioni, si trova :

se $-½ < c \leq 0$ $\quad x > \log 1/(c + ½)$

se $c > 0$ $\quad \log 1/(c + ½) < x < \log 1/c$

3.

Studio di f (t)

La funzione t / sent ha una discontinuità eliminabile in t = 0 (il limite vale 1) e dunque è integrabile in un intorno di 0; questo permette la scelta di 0 come estremo di integrazione.

f (t) non è integrabile in nessun intorno di π (e di –π , data la simmetria). Infatti per $t \to \pi$ $f(t) \cong \frac{\pi}{\text{sen } t}$. Posto $s = t - \pi \to 0$, $\frac{1}{\text{sen } t} = -\frac{1}{\text{sens}} \approx -\frac{1}{s}$; f (t) è dunque un infinito di ordine 1 e quindi non integrabile.

In (-π , π) f (t) è positiva.

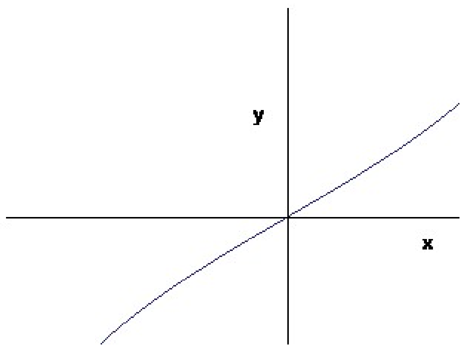
Studio di F (x)

CE (-π , π)

SGN positiva in (0 , π) , negativa in (-π , 0) , nulla per x = 0

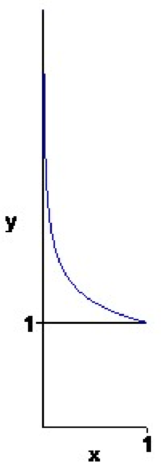
DRV F' (x) = x / sen x , sempre positiva nel CE

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\text{sen } t} dt \overline{\overline{s=-t}} -\int_0^{x} \frac{s}{\text{sen } s} ds = -F(x)$$



$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\text{sen}\, t}\, dt \approx \int_0^x \left(\frac{1}{1 - t^2/6} \right) dt = \int_0^x \left(1 + t^2/6\right) dt = x + \frac{x^3}{18}$$ che in 0 ha un flesso.

4. SOLO PER ESAME DA 9 CREDITI



$$V = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 1 \right) dx = \int_0^1 2\pi \left(x^{3/4} - x \right) dx = 2\pi \left[\frac{4}{7} x^{7/4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{7}$$

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{y^8}\, dy = \pi \left[-\frac{1}{7y^7} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{7}$$

4. SOLO PER ESAME DA 12 CREDITI

$$n \log \frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} \approx n \left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} - 1 \right) = -\frac{n}{n^\alpha + 1} \approx -\frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

La serie converge se $\alpha - 1 > 1$, cioè se $\alpha > 2$.

Prova scritta del 14.9.2021 – Parte seconda [C]

1.

C.E. R

Infatti deve essere $2x^2+2x+1>0$, $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\leq 1$.

La prima disequazione è sempre verificata; la seconda – elevando al quadrato – equivale a

$x^2+2x+1 \leq 2x^2+2x+1$ ed anche questa è sempre verificata.

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

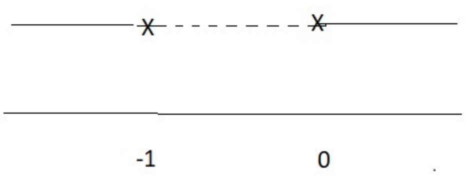
Per x →∞ f (x) → π/4 ; asintoto orizzontale in entrambe le direzioni.

La funzione è ovviamente positiva; in particolare la sua immagine è contenuta in [0 , π/2].

f (0) = 0 , f (-1) = π/2

DRV

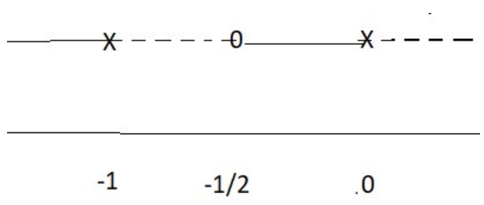
$$f'(x) = \operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x+1)\frac{1}{2x^2+2x+1}$$



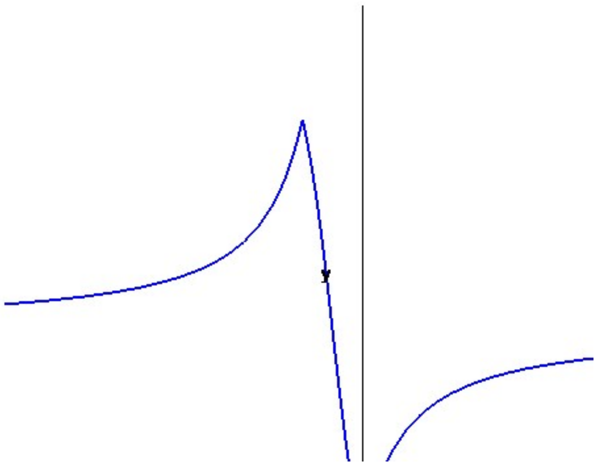
-1 punto di massimo, 0 punto di minimo; entrambi punti angolosi

DRV²

$$f''(x) = -2\operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x+1)\frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2}$$



-1 , -1/2 , 0 punti di flesso



2.

C.E. $x \in R$, $y \neq 0$

Nessuna soluzione costante

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è. Possiamo quindi limitarci a studiare le soluzioni positive.

$$\int y\, e^{-y^2} dy = \int e^{2x}\, dx \iff -\frac{e^{-y^2}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - c) \iff e^{-y^2} = c - e^{2x} \iff y^2 = \log\frac{1}{c - e^{2x}} \iff y = \sqrt{\log\frac{1}{c - e^{2x}}}$$

(Abbiamo considerato le soluzioni positive).

Perché i calcoli fatti abbiano senso, deve essere $0 < c - e^{2x} < 1$ cioè $c - 1 < e^{2x} < c$. Deve dunque essere $c > 0$. Risolvendo il sistema delle due disequazioni, si trova :

se $c > 1$ $\quad \log \sqrt{c-1} < x < \log\sqrt{c}$

se $0 < c \leq 1$ $\quad x < \log\sqrt{c}$

3.

Studio di f (t)

La funzione $tg^3\, t / t$ ha una discontinuità eliminabile in $t = 0$ (il limite vale 1) e dunque è integrabile in un intorno di 0; questo permette la scelta di 0 come estremo di integrazione.

$f(t)$ non è integrabile in nessun intorno di $\pi/2$ (e di $-\pi/2$, data la simmetria). Infatti per $t \to \pi/2$ $f(t) \cong \dfrac{2}{\pi \cos^3 t}$. Posto $s = t - \pi/2 \to 0$, $\dfrac{1}{\cos t} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} s} \approx -\dfrac{1}{s}$; $f(t)$ è dunque un infinito di ordine 3 e quindi non integrabile.

In $(-\pi/2, \pi/2)$ $f(t)$ è positiva.

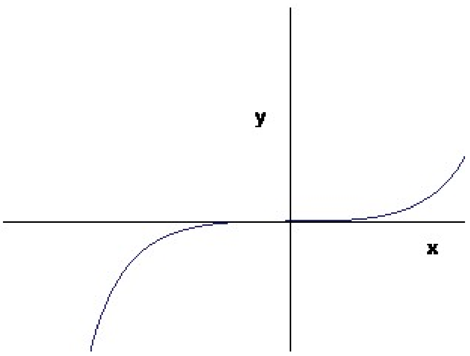
Studio di $F(x)$

CE $(-\pi/2, \pi/2)$

SGN positiva in $(0, \pi/2)$, negativa in $(-\pi/2, 0)$, nulla per $x = 0$

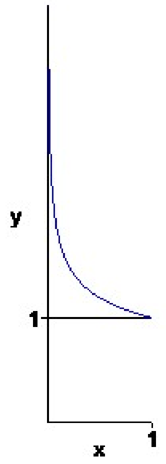
DRV $F'(x) = tg^3 x / x$, sempre positiva nel CE

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{tg^3 t}{t}\, dt \ \overset{s=-t}{=\!=} \ -\int_0^{x} \frac{tg^3 s}{s}\, ds = -F(x)$$



$$F(x) = \int_0^x \frac{tg^3 t}{t}\, dt \approx \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3}$$ che in 0 ha un flesso.

4. SOLO PER ESAME DA 9 CREDITI



$$V = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = \int_0^1 2\pi \left(x^{1/2} - x \right) dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{y^4} \, dy = \pi \left[- \frac{1}{3 y^3} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$$

4. SOLO PER ESAME DA 12 CREDITI

$$n^{\alpha} \log \frac{n}{n+1} \approx n^{\alpha} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = - \frac{n^{\alpha}}{n+1} \approx - \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

La serie converge se $1 - \alpha > 1$, cioè se $\alpha < 0$.

Prova scritta del 14.9.2021 – Parte seconda [D]

1.

C.E. R

Infatti deve essere $2x^2 - 2x + 1 > 0$, $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \leq 1$.

La prima disequazione è sempre verificata; la seconda – elevando al quadrato – equivale a

$x^2 - 2x + 1 \leq 2x^2 - 2x + 1$ ed anche questa è sempre verificata.

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

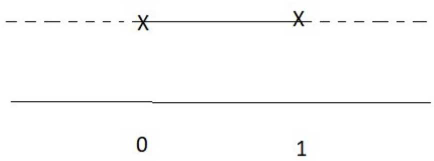
Per $x \to \infty$ $f(x) \to \pi/4$; asintoto orizzontale in entrambe le direzioni.

La funzione è ovviamente sempre positiva; in particolare la sua immagine è contenuta in $[0, \pi/2]$.

$f(0) = 0$, $f(1) = \pi/2$

DRV

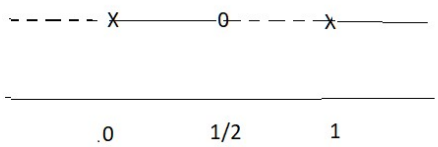
$$f'(x) = -\operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x-1) \frac{1}{2x^2-2x+1}$$



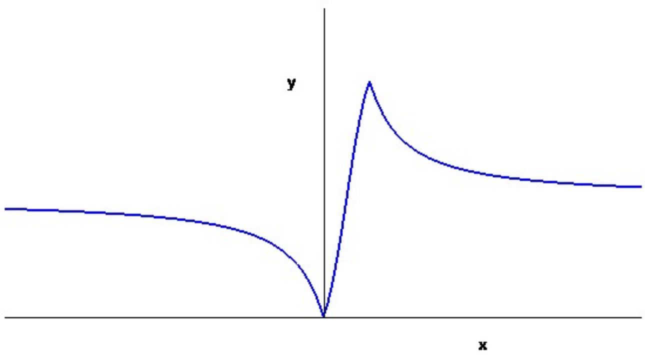
0 punto di minimo, 1 punto di massimo; entrambi punti angolosi

DRV^2

$$f''(x) = 2\operatorname{sgn}x \operatorname{sgn}(x-1) \frac{2x-1}{(2x^2-2x+1)^2}$$



0 , 1/2 , 1 punti di flesso



2.

C.E. $x \in R$, $y \neq 0$

Nessuna soluzione costante

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è. Possiamo quindi limitarci a studiare le soluzioni positive.

$$\int y e^{-y^2} dy = \int e^{-2x} dx \Leftrightarrow -\frac{e^{-y^2}}{2} = \frac{1}{2}(c - e^{-2x}) \Leftrightarrow e^{-y^2} = 2(e^{-2x} - c) \Leftrightarrow y^2 = \log\frac{1}{e^{-2x} - c} \Leftrightarrow y = \sqrt{\log\frac{1}{e^{-2x} - c}}$$

(Abbiamo considerato le soluzioni positive).

Perché i calcoli fatti abbiano senso, deve essere $0 < e^{-2x} - c < 1$ cioè $c < e^{-2x} < c + 1$ Deve dunque essere $c > -1$. Risolvendo il sistema delle due disequazioni, si trova :

se $-1 < c \leq 0$ $\quad x > \log 1/(c + 1)^{1/2}$

se $c > 0$ $\quad \log 1/(c + 1)^{1/2} < x < \log 1/c^{1/2}$

3.

Studio di f (t)

La funzione t^3 / sent ha una discontinuità eliminabile in $t = 0$ (il limite vale 0) e dunque è integrabile in un intorno di 0; questo permette la scelta di 0 come estremo di integrazione.

f (t) non è integrabile in nessun intorno di π (e di –π , data la simmetria). Infatti per $t \to \pi$ $f(t) \cong \dfrac{\pi^3}{\text{sen } t}$. Posto $s = t - \pi \to 0$, $\dfrac{1}{\text{sen } t} = -\dfrac{1}{\text{sens}} \approx -\dfrac{1}{s}$; f (t) è dunque un infinito di ordine 1 e quindi non integrabile.

In (-π , π) f (t) è positiva.

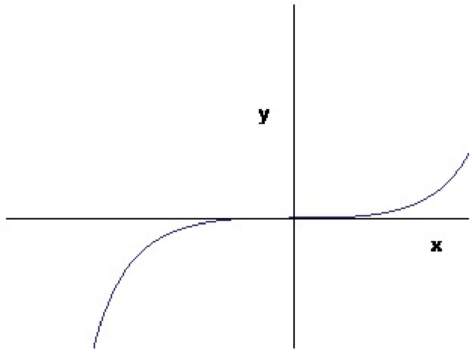
Studio di F (x)

CE (-π , π)

SGN positiva in (0 , π) , negativa in (-π , 0) , nulla per x = 0

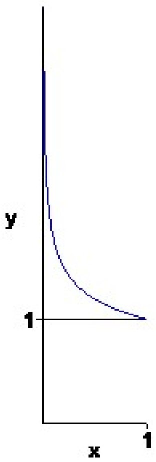
DRV $F'(x) = x^3 / \text{sen } x$, sempre positiva nel CE

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{t^3}{\text{sen } t} dt \overset{=\!=}{\underset{s=-t}{}} -\int_0^{x} \frac{s^3}{\text{sen } s} ds = -F(x)$$



$$F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{\operatorname{sen} t}\,dt \approx \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}$$ che in 0 ha un flesso.

4. SOLO PER ESAME DA 9 CREDITI



$$V = \int_0^1 2\pi x\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 1\right) dx = \int_0^1 2\pi\left(x^{5/6} - x\right) dx = 2\pi\left[\frac{6}{11}x^{11/6} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{11}$$

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{y^{12}}\,dy = \pi\left[-\frac{1}{11\,y^{11}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{11}$$

4. SOLO PER ESAME DA 12 CREDITI

$$n^2 \log\frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} \approx n^2\left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} - 1\right) = -\frac{n^2}{n^\alpha + 1} \approx -\frac{1}{n^{\alpha-2}}$$

La serie converge se $\alpha - 2 > 1$, cioè se $\alpha > 3$.