Soluzioni [A]

1

La funzione f (t) non è integrabile in nessun intorno di 0 e di π. Infatti:

per $t \to 0$ $f(t) \approx 1/t^3$ (infinito di ordine > 1)

per $t \to \pi$ $f(t) \approx c/(t-\pi)$ (infinito di ordine 1).

Studio della funzione F (x)

C.E. (0 , π)

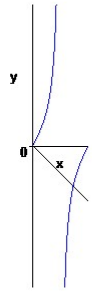
SGN in (0 , π) f (t) è positiva e dunque il segno dell'integrale dipende solo dall'ordine degli estremi di integrazione: F (x) < 0 in (0 , 1) , F (x) = 0 per x = 1 , F (x) > 0 in (1 , π)

LIM per $x \to 0$ $F(x) \to -\infty$, per $x \to \pi$ $F(x) \to +\infty$

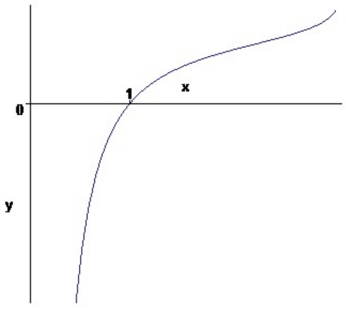
DRV $F'(x) = 1/(x^2 \operatorname{sen}x)$, positiva nel C.E.

DRV^2 $$F''(x) = \frac{-2\operatorname{sen}x - x\cos x}{x^3 \operatorname{sen}^2 x}$$

La derivata è positiva se 2 senx + x cosx < 0. In (0 , π/2) la disequazione non ha soluzioni; in (π/2 , π) equivale a 2 tgx + x > 0 , ovvero 2 tgx > -x. La risoluzione grafica prova che in questo intervallo esiste un valore α per cui la disequazione è verificata per x > α.

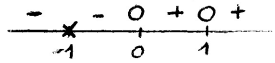


GRAFICO



2.

C.E. $x \neq -1$

SGN


LIM per $x \to -1$ $f(x) \to -\infty$ asintoto verticale

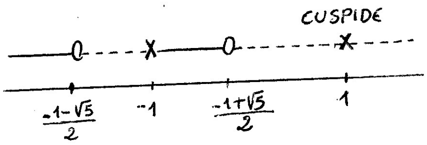
per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim x \to \pm\infty$

per $x \to +\infty$ $f(x) - x = x \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}$

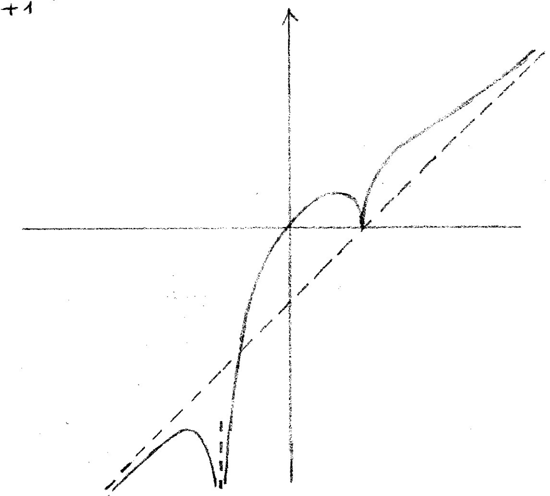
$\sim \dfrac{-2x}{2x} \to -1$; $y = x - 1$ asintoto

Un calcolo analogo prova che $y = x-1$ è asintoto anche per $x \to -\infty$

DRV $f'(x) = \mathrm{sgn}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} \; \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2}$



DRV^2 $f''(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2(x+1)^2} \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$



3.

Integrando per parti, si ottiene :

$$-\frac{1}{x}\log(x^2-2x+2) + \int \frac{2x-2}{x(x^2-2x+2)}\,dx .$$

Per calcolare il secondo integrale, scomponiamo la funzione razionale secondo il metodo di Hermite (qui riportiamo direttamente il risultato della scomposizione):

$$\int \frac{2x-2}{x(x^2-2x+2)}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx .$$

Il primo integrale fornisce – log | x | + c. Rimane da calcolare il secondo integrale.

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + \mathrm{arctg}(x-1) + c.$$

Soluzioni [B]

1

La funzione f (t) non è integrabile in nessun intorno di 0 e di π. Infatti:

per $t \to 0$ $f(t) \approx 1/t^2$ (infinito di ordine > 1)

per $t \to \pi$ $f(t) \approx c/(t - \pi)$ (infinito di ordine 1).

Studio della funzione F (x)

C.E. (0 , π)

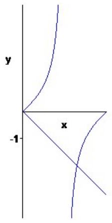
SGN in (0 , π) f (t) è positiva e dunque il segno dell'integrale dipende solo dall'ordine degli estremi di integrazione: F (x) < 0 in (0 , 1) , F (x) = 0 per x = 1 , F (x) > 0 in (1 , π)

LIM per $x \to 0$ $F(x) \to -\infty$, per $x \to \pi$ $F(x) \to +\infty$

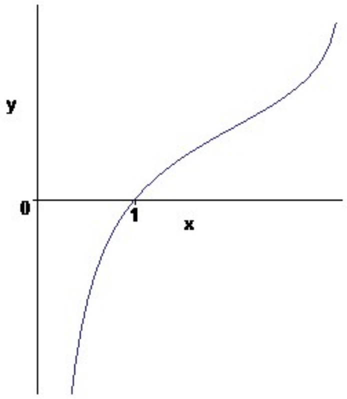
DRV $F'(x) = 1/(x \operatorname{sen} x)$, positiva nel C.E.

DRV^2 $$F''(x) = \frac{-\ \operatorname{sen}x - x\cos x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

La derivata è positiva se senx + x cosx < 0. In (0 , π/2) la disequazione non ha soluzioni; in (π/2 , π) equivale a tgx + x > 0 , ovvero tgx > -x. La risoluzione grafica prova che in questo intervallo esiste un valore α per cui la disequazione è verificata per x > α.

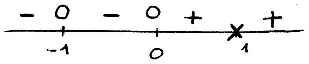


GRAFICO



2.

C.E. $x \neq 1$

SGN 

LIM per $x \to 1$ $f(x) \to +\infty$ asintoto verticale

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim x \to \pm\infty$

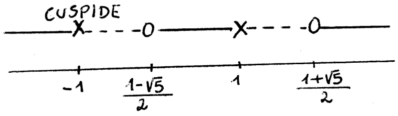
per $x \to +\infty$ $f(x) - x = x \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} =$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \sim \frac{2x}{2x} \to 1$$

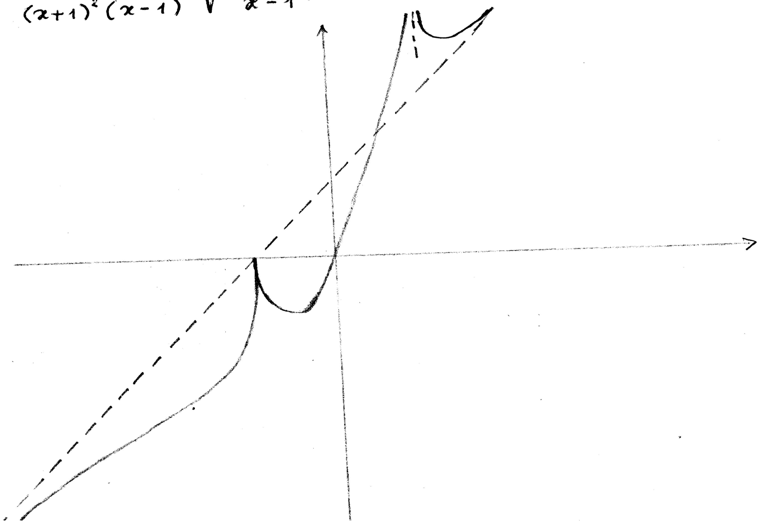
$y = x + 1$

Un calcolo analogo prova che $y = x + 1$ è asintoto anche per $x \to -\infty$.

DRV $f'(x) = \mathrm{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}\ \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$



DRV^2 $f''(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2 (x-1)} \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$



3. Integrando per parti, si ottiene :

$$-\frac{1}{x}\log(x^2 - 4x + 5) + \int \frac{2x - 4}{x(x^2 - 4x + 5)}\,dx\,.$$

Per calcolare il secondo integrale, scomponiamo la funzione razionale secondo il metodo di Hermite (qui riportiamo direttamente il risultato della scomposizione):

$$\int \frac{2x - 4}{x(x^2 - 4x + 5)}\,dx = -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{5}\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 5}\,dx\,.$$

Il primo integrale fornisce $-\dfrac{4}{5}\log|x| + c$. Rimane da calcolare il secondo integrale.

$$\frac{2}{5}\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 5}\,dx = \frac{2}{5}\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}\,dx + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 4x + 5) + \mathrm{arctg}(x - 2) + c.$$