Soluzioni [A]

1.

Limitazioni del dominio di definizione:

periodo 2π → si studia in $[-\pi, \pi]$

dispari → basta studiarla in $[0, \pi]$

simmetria di senx e di | cosx | rispetto alla retta $x = \pi/2$ → basta studiarla in $[0, \pi/2]$

C.E. (relativamente all'intervallo $[0, \pi/2]$) : $[0, \pi/2)$

SGN negativa, nulla in $x = 0$

LIM per $x \to \pi/2^-$ $f(x) \to -\infty$

DRV $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos^2 x \log\cos^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos x}$

Per studiare il degno della derivata, basta studiare quello del numeratore; ponendo $t = \cos^2 x$, ci riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{2} t \log t + t - 1$, $t \in (0,1]$.

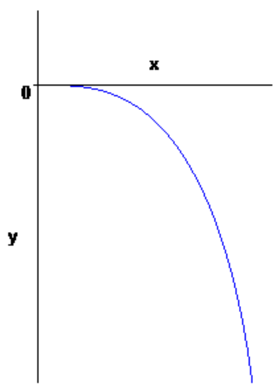
Per $t \to 0$ $\varphi(t) \to -1$, per $t = 1$ $\varphi(t) = 0$

$\varphi'(t) = \frac{1}{2}(\log t + 3) > 0$ per $t > e^{-3}$

Dai calcoli precedenti segue che $\varphi(t)$ è negativa e dunque tale è anche $f'(x)$.

Inoltre $f'(0) = 0$.

GRAFICO (nell'intervallo minimo e in un intervallo di ampiezza il periodo)



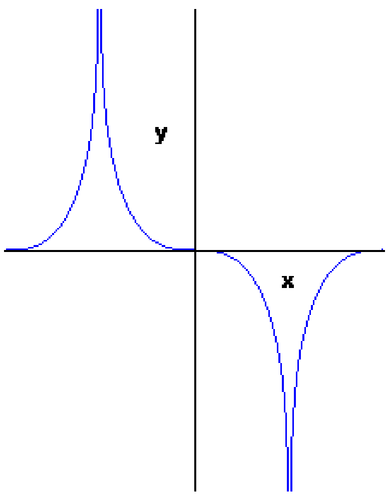
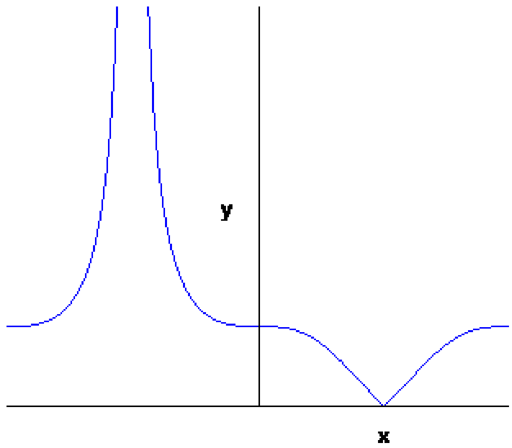


GRAFICO di exp (f (x))



La derivata exp (f (x)) f' (x) di questa funzione è nulla per x = 0 ed x = ±π (verifica immediata) e vale -1 per x = π/2 (che è una discontinuità eliminabile). Infatti :

Per $x \to \pi/2^-$

$$e^{f(x)} = e^{\operatorname{senx} \log \cos x} \approx e^{\log \cos x} = \cos x$$

$$e^{f(x)} f'(x) \approx \cos x \; \frac{\cos^2 x \log \cos x + \cos^2 x - 1}{\cos x} \to -1$$

2.

Indichiamo con L il lato del quadrato di base e con H l'altezza. L'area totale è dunque data da $2L^2 + 4LH$; dobbiamo rendere minima questa quantità con il vincolo che sia $L^2H = V$. Il vincolo permette di scrivere $H = V/L^2$. Otteniamo dunque la funzione $A(L) = 2L^2 + 4V/L$ nell'intervallo $[0, +\infty)$. Il minimo esiste perché agli estremi dell'intervallo la funzione diverge a $+\infty$. Il punto di minimo è l'unico in cui si annulla la derivata $A'(L)$, cioè $L = V^{1/3}$. Per questa scelta si ottiene L = H e dunque il solido di area totale minima e volume dato è il cubo.

3.

$$(x - \operatorname{tg}x)(x + \operatorname{tg}x) = (-x^3/3 + o(x^4))(2x + o(x)) = -2x^4/3 + o(x^4)$$

$$\log^2(1+x) = (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4))^2 = x^2 - x^3 + 11x^4/12 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$$

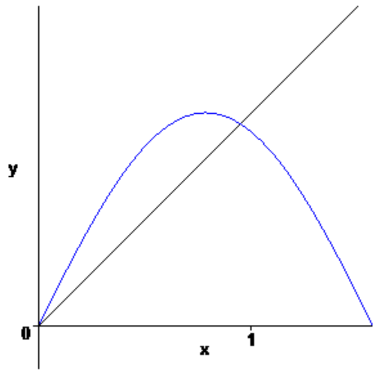
$$\sqrt{1+x^4} = 1 + x^4/2 + o(x^4)$$

$$f(x) \approx \frac{11x^4/12}{-2x^4/3} \to -11/8$$

4.

La soluzione $x = 0$ è evidente. Proviamo che l'equazione ha una e una sola soluzione positiva α. Tenendo conto che la funzione $x - \text{sen}2x$ è dispari, $-\alpha$ è la terza soluzione.

Poiché $\text{sen}2x$ assume solo valori compresi tra -1 ed 1, le soluzioni positive dell'equazione $x = \text{sen}\,2x$ dovranno stare nell'intervallo (0 , 1). Un confronto tra grafici permette di ottenere il risultato richiesto.



Possiamo applicare il metodo delle tangenti nell'intervallo $[\pi/4\ ,\ \pi/2]$

In questo intervallo è $f(\pi/4) < 0 < f(\pi/2)$, $f' > 0$, $f'' > 0$).

La successione ricorsiva parte da $x_0 = \pi/2$ ed è data da $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \text{sen}\,2x_n}{1 - 2\cos 2x_n}$.

Le prime due iterate sono $x_1 = \pi / 3$, $x_2 = \dfrac{\pi/3 + \sqrt{3}/2}{2}$.

Soluzioni [B]

1.

Limitazioni del dominio di definizione:

periodo 2π → si studia in $[-\pi, \pi]$

pari → basta studiarla in $[0, \pi]$

simmetria di cosx rispetto al punto $(\pi/2, 0)$, simmetria di $|\operatorname{sen} x|$ rispetto alla retta $x = \pi/2$ → basta studiarla in $[0, \pi/2]$

C.E. (relativamente all'intervallo $[0, \pi/2]$) : $(0, \pi/2]$

SGN negativa, nulla in $x = \pi/2$

LIM per $x \to 0^+$ $f(x) \to -\infty$

DRV $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x \log \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Per studiare il degno della derivata, basta studiare quello del numeratore; ponendo $t = \operatorname{sen}^2 x$, ci riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(t) = -\frac{1}{2} t \log t - t + 1$, $t \in (0, 1]$.

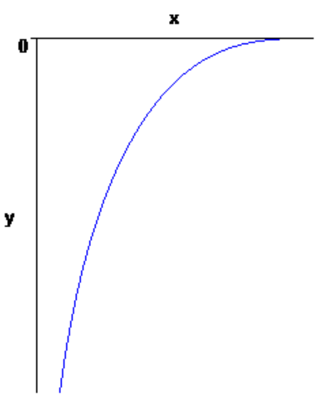
Per $t \to 0$ $\varphi(t) \to 1$, per $t = 1$ $\varphi(t) = 0$

$\varphi'(t) = -\frac{1}{2}(\log t + 3) > 0$ per $t < e^{-3}$

Dai calcoli precedenti segue che $\varphi(t)$ è positiva e dunque tale è anche $f'(x)$.

Inoltre $f'(\pi/2) = 0$.

GRAFICO (nell'intervallo minimo e in un intervallo di ampiezza il periodo)



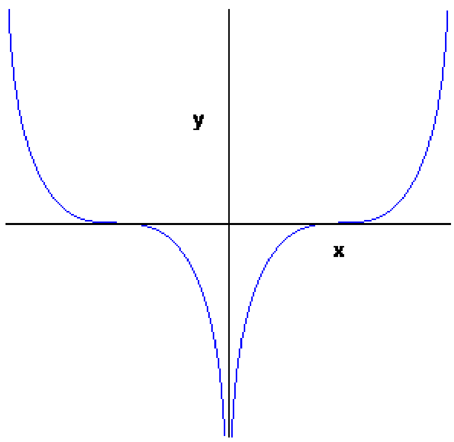
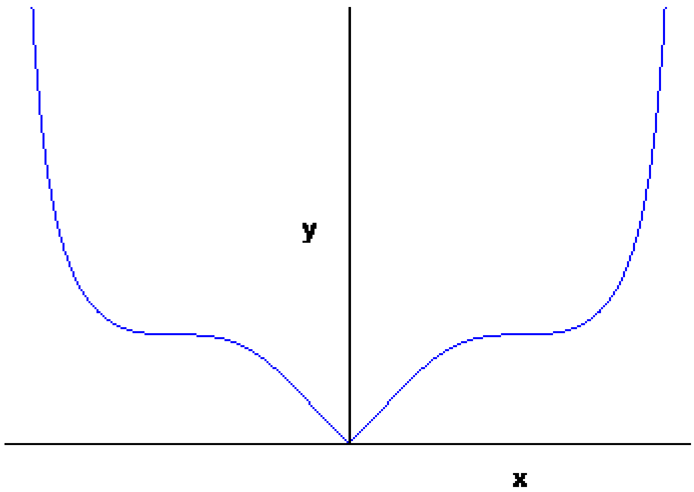


GRAFICO di exp (f (x))



La derivata exp (f (x)) f' (x) di questa funzione è nulla per $x = \pm\pi/2$ (verifica immediata) ed ha un punto angoloso per x = 0 (che è una discontinuità eliminabile). Infatti :

Per $x \to 0^{\pm}$:

$$e^{f(x)} = e^{\cos x \log |\operatorname{sen} x|} \approx e^{\log |\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$$

$$e^{f(x)} f'(x) \approx |\operatorname{sen} x| \frac{-\operatorname{sen}^2 x \log \operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \to \pm 1$$

2.

Indicata con x la distanza della corda dal centro, la corda ha lunghezza $2\sqrt{R^2 - x^2}$ (teorema di Pitagora). L'area del triangolo è dunque $x\sqrt{R^2 - x^2}$. Poiché nell'intervallo [0 , R] in cui varia x la funzione così ottenuta è positiva e vale 0 agli estremi, il punto di massimo cercato è l'unico punto stazionario . Poiché la derivata vale $-x^2/\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x^2}$, si ottiene che deve essere $x = R/\sqrt{2}$.

3.

$$(x - \text{sen}x)(x + \text{sen}x) = (x^3/6 + o(x^4))(2x + o(x)) = x^4/3 + o(x^4)$$

$$\log^2(1-x) = (-x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 + o(x^4))^2 = x^2 + x^3 + 11x^4/12 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$$

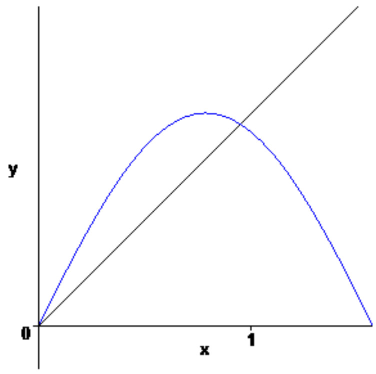
$$\sqrt{1+x^4} = 1 + x^4/2 + o(x^4)$$

$$f(x) \approx \frac{11x^4/12}{x^4/3} \rightarrow 11/4$$

4.

La soluzione x = 0 è evidente. Proviamo che l'equazione ha una e una sola soluzione positiva α. Tenendo conto che la funzione x – sen2x è dispari, -α è la terza soluzione.

Poiché sen2x assume solo valori compresi tra -1 ed 1, le soluzioni positive dell'equazione x = sen 2x dovranno stare nell'intervallo (0 , 1). Un confronto tra grafici permette di ottenere il risultato richiesto.



Possiamo applicare il metodo delle tangenti nell'intervallo $[\pi/4\ ,\ \pi/2]$

In questo intervallo è $f(\pi/4) < 0 < f(\pi/2)$, f' > 0 , f'' > 0).

La successione ricorsiva parte da $x_0 = \pi/2$ ed è data da $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \text{sen}\,2x_n}{1 - 2\cos 2x_n}$.

Le prime due iterate sono $x_1 = \pi/3$, $x_2 = \dfrac{\pi/3 + \sqrt{3}/2}{2}$.