Soluzioni [A]

1.

$f(t) = 1 / \log t$

per $t \to 0$ $\quad f(t) \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile $\to$ integrabile

per $t \to 1$ $\quad f(t) \approx 1 / (t - 1)$ $\quad \to$ non integrabile

per $t \to +\infty$ $\quad f(t) > 1 / t$ $\quad \to$ non integrabile

$F(x)$

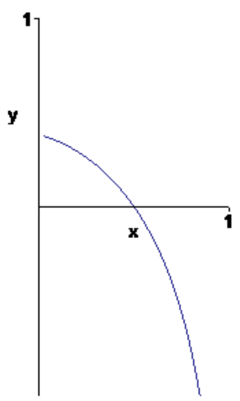
C.E. $\quad [0, 1)$

SGN $\quad$ positiva in $[0, ½)$, nulla in ½, negativa in $(½, 1)$

LIM $\quad$ per $x \to 1^-$ $\quad F(x) \to -\infty$

DRV $\quad 1 / \log x < 0$; $F'(0) = 0$

DRV^2 $\quad -1 / (x \log^2 x) < 0$



$G(x)$

C.E. $\quad (1, +\infty)$

SGN $\quad$ negativa in $(1, 2)$, nulla in 2, positiva in $(2, +\infty)$

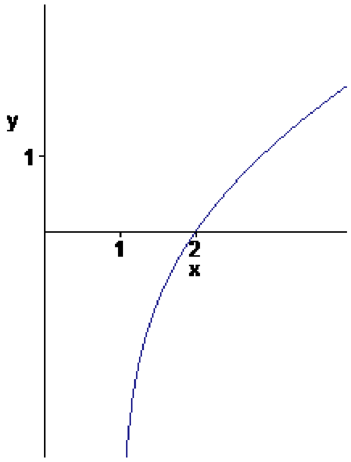
LIM $\quad$ per $x \to 1^+$ $\quad F(x) \to -\infty$

per $x \to +\infty$ $\quad F(x) \to +\infty$

DRV $\quad 1 / \log x > 0$

per $x \to +\infty$ $\quad F(x)/x \overset{\text{H.}}{=} 1/\log x \to 0$ non c'è asintoto

$DRV^2 \quad -1/(x \log^2 x) < 0$



2.

Soluzioni equazione omogenea : $c_1 \cos 2x + c_2 \,\text{sen}\, 2x$

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: si cerca una soluzione della forma $c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \,\text{sen}\, 2x$; calcoliamo le derivate c_1' , c_2' :

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\,2x \\ 1/\text{sen}\,2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \text{sen}\,2x \\ -2\,\text{sen}\,2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = -1/2$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\,\text{sen}\,2x & 1/\text{sen}\,2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \text{sen}\,2x \\ -2\,\text{sen}\,2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = \frac{\cos 2x}{2\,\text{sen}\,2x}$$

Dunque $c_1 = -x/2$, $c_2 = -(\log|\text{sen}\,2x|)/4$.

3.

C.E. $\quad x \neq -1$

SGN positiva in $(-\sqrt[3]{2}\,, -1)$ e in $(0, +\infty)$, negativa in $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ e in $(-1, 0)$, nulla in $-\sqrt[3]{2}$ e in 0.

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \approx x \to +\infty$

$f(x) - x = x / (x^3 + 1) \approx 1 / x^2 \to 0$

Questo prova che $y = x$ è asintoto obliquo e che l'area richiesta tra il grafico e l'asintoto ha area finita

per $x \to -\infty$ $f(x) \approx x \to -\infty$

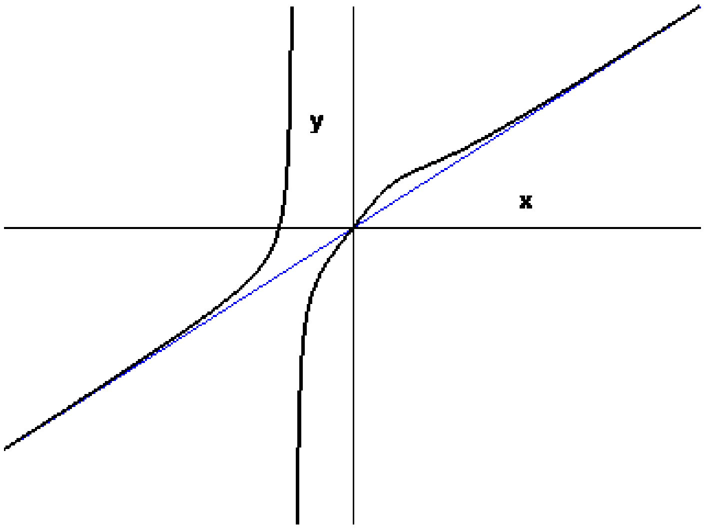
Con lo stesso calcolo precedente si trova che $y = x$ è asintoto

per $x \to -1^{\pm}$ $f(x) \approx x \to \mp\infty$

DRV $f'(x) = (x^6 + 2) / (x^3 + 1)^2 > 0$

DRV^2 $f''(x) = 6x^2 (x^3 - 2) / (x^3 + 1)^3$

positiva per $x < -1$ e per $x > \sqrt[3]{2}$.



Soluzioni [B]

1.

$f(t) = 1 / \log^2 t$

per $t \to 0$ $f(t) \to 0$ disc. eliminabile $\to$ integrabile

per $t \to 1$ $f(t) \approx 1 / (t-1)^2$ $\to$ non integrabile

per $t \to +\infty$ $f(t) > 1/t$ $\to$ non integrabile

F (x)

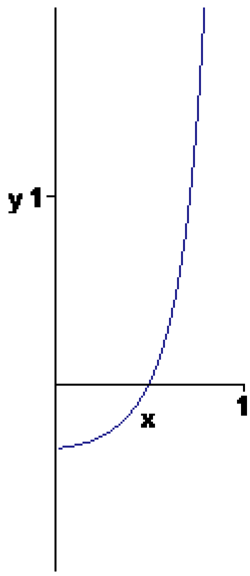
C.E. $[0, 1)$

SGN negativa in $[0, ½)$, nulla in ½, positiva in $(½, 1)$

LIM per $x \to 1^-$ $F(x) \to +\infty$

DRV $1 / \log^2 x > 0$; $F'(0) = 0$

DRV² $-2 / (x \log^3 x) > 0$



G (x)

C.E. $(1, +\infty)$

SGN negativa in $(1, 2)$, nulla in 2, positiva in $(2, +\infty)$

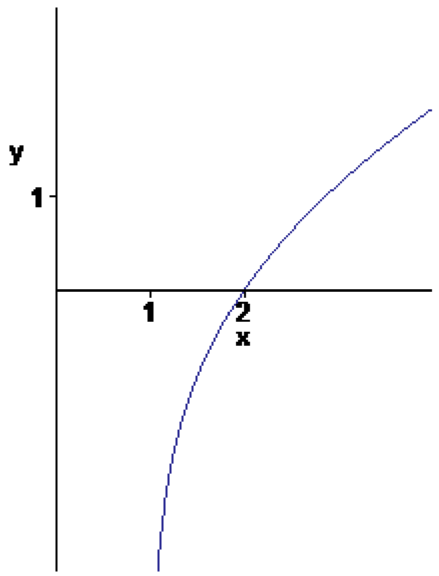
LIM per $x \to 1^+$ $F(x) \to -\infty$

per $x \to +\infty$ $F(x) \to +\infty$

DRV $1 / \log^2 x > 0$

per $x \to +\infty$ $F(x) / x \overset{=}{\mathrm{H}}.\ 1 / \log^2 x \to 0$ non c'è asintoto

DRV^2 $-2 / (x \log^3 x) < 0$



2.

Soluzioni equazione omogenea : $c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: si cerca una soluzione della forma $c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \operatorname{sen} 2x$; calcoliamo le derivate c_1', c_2' :

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 1/\cos 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = -\operatorname{sen}2x / (2\cos 2x)$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & 1/\cos 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = 1/2$$

Dunque $c_1 = (\log|\cos 2x|)/4$, $c_2 = x/2$.

3.

C.E. $x \neq -1$

SGN positiva in $(-\infty, 0)$ e in $(1, \sqrt[3]{2})$, negativa in $(0, 1)$ e in $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$, nulla in 0 e in $\sqrt[3]{2}$.

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \approx -x \to -\infty$

$f(x) + x = x/(x^3 - 1) \approx 1/x^2 \to 0$

Questo prova che $y = -x$ è asintoto obliquo e che l'area richiesta tra il grafico e l'asintoto ha area finita

per $x \to -\infty$ $f(x) \approx -x \to +\infty$

Con lo stesso calcolo precedente si trova che $y = x$ è asintoto

per $x \to 1^{\pm}$ $f(x) \approx x \to \pm\infty$

DRV $f'(x) = -(x^6 + 2)/(1 - x^3)^2 < 0$

DRV^2 $f''(x) = -6x^2(x^3 - 2)/(1 - x^3)^3$

positiva per $x < -\sqrt[3]{2}$ e per $x > 1$.