Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n.2 del 17.1.08 - Calcolo integrale

Soluzioni

1.

La funzione $f(t) = t(t-1)/\log t$ è definita per $t > 0$, $t \neq 1$; nel suo C.E. è sempre positiva

Per $t \to 0$ $f(t) \to 0$, quindi f è integrabile in un intorno di 0.

Per $t \to 1$ $f(t) \to 1$, quindi f è integrabile in un intorno di 1.

Per $t \to +\infty$ $f(t) \to +\infty$, quindi f non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$.

La funzione $F(x)$ è definita per $x \geq 0$; è positiva per $x > 1$, negativa per $0 < x < 1$, nulla per $x = 0$ e per $x = 1$.

Il limite per $x \to +\infty$ si calcola con il teorema della media integrale :

$$F(x) = \frac{\left(x - \sqrt{x}\right) \xi(\xi - 1)}{\log \xi} \approx \frac{x\,\xi^2}{\log \xi} > \frac{x^2}{\log x} \to +\infty$$

(senza asintoto) .

Per ottenere il segno della derivata

$$F'(x) = \frac{x^2 - x - \sqrt{x} + 1}{\log x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\log x}\left(x\sqrt{x} + x - 1\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\log x}\,\varphi(x)$$

(per $x \neq 0$, $x \neq 1$) occorre studiare graficamente il segno di $\varphi(x)$ (quello del rapporto è positivo). Si ottiene che esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $\varphi(x)$ è negativa per $0 < x < \alpha$, positiva per $x > \alpha$.

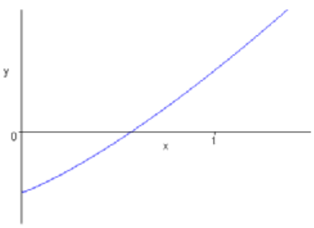
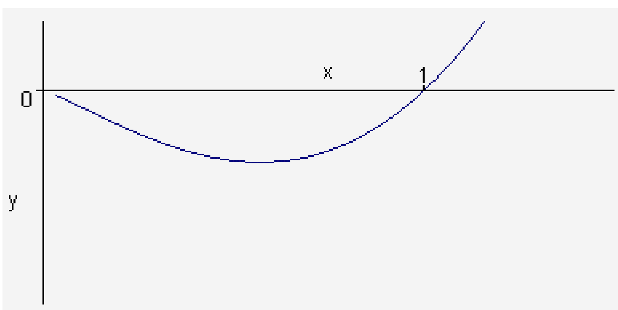


Grafico di F (x)



2.

C.E. $x \neq 0$, $y \in \mathbf{R}$

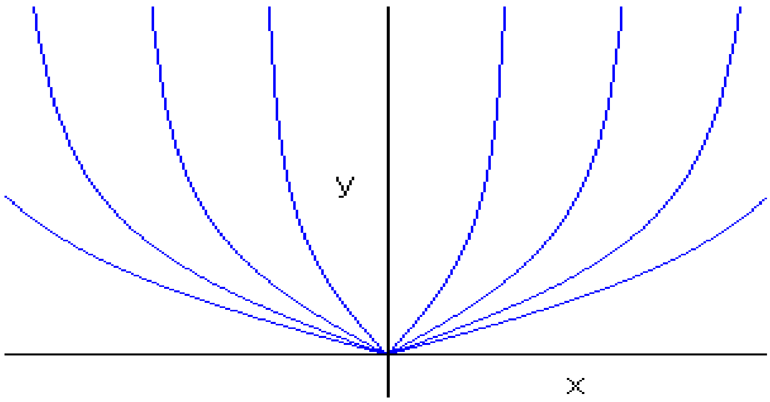
$y = 0$ è soluzione costante

Per trovare le soluzioni non costanti , dobbiamo dividere il caso $y > 0$ da quello $y < 0$. Però, osservato che se $y(x)$ è una soluzione anche $-y(x)$ lo è, possiamo limitarci a studiare le soluzioni positive .
Separando le variabili e integrando si trova

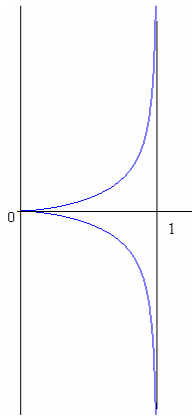
$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(1+s^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s} \Rightarrow \log \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \log|x| + \log c$$

da cui (indicando con k una costante positiva) si ottiene :

$$y(x) = \frac{k|x|}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} , \quad -1/k < x < 1/k .$$



3.



$$A = 2 \int_0^1 x \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$$

L'integrale esiste perché per $x \to 1$ $f(x)$ è un infinito di ordine ½ .

Per calcolare l'integrale si pone

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$$

e dunque $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt$. In questo modo si ottiene :

$$4\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)^3}\,dt\,.$$

Tenendo conto che la funzione integrando è pari , la scomposizione di Hermite è della forma

$$\frac{A}{1+t^2} + \left(\frac{B\,t + C\,t^3}{(1+t^2)^2}\right)' \,.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene A = 3/2 , B = - 3/2 , C = - 5/2 .
Una primitiva della funzione è dunque

$$\frac{3}{2}\,\text{arctg}\,t - \frac{t\,(3+5\,t^2)}{2\,(1+t^2)^2}\,.$$

L'area vale 3 π / 4 .

4.

$$(a)\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}\,n\,\log(n+1)}{|x|^{n}\,(n+1)\,\log n} \to |x|$$

Se $|x| < 1$, la serie converge , se $|x| > 1$ la serie non converge.

Se $x = 1$, $a_n = \dfrac{\log n}{n} > \dfrac{1}{n}$ la serie diverge

Se $x = -1$, $a_n = (-1)^n \dfrac{\log n}{n}$ la serie converge per il teorema di Leibniz.

$$(b)\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\;\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}$$

Per $|x| > 1$ il rapporto tende a $1/|x| < 1$ e quindi la serie converge.
Per $|x| < 1$ tende a $|x|$ e quindi anche in questo caso la serie converge .
Per $x = 1$ la serie , di termine generale ½ , diverge ; per $x = -1$ la serie , di termine generale $(-1)^n/2$, è indeterminata.