Introduzione alla Matematica

Soluzioni della prova scritta del 13.6.08

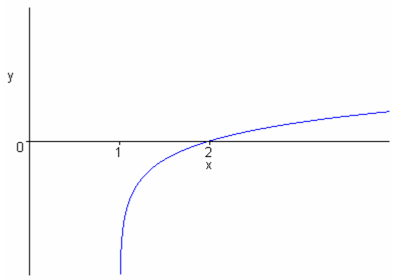
1.

C.E.
$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \log |x - 1| > 0 \\ \log |x - 1| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ |x - 1| > 1 \\ |x - 1| \neq e \end{cases}$$

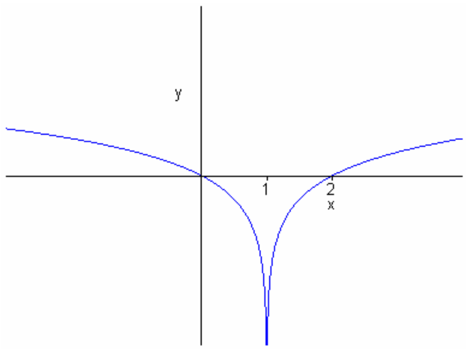
$$\Leftrightarrow \; x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{1 \pm e\}$$

SGN $\quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \log\log|x-1| \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 1-e) \cup (1+e, +\infty)$

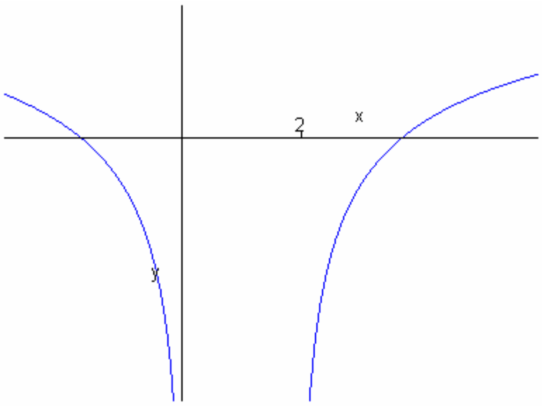
GRAFICO



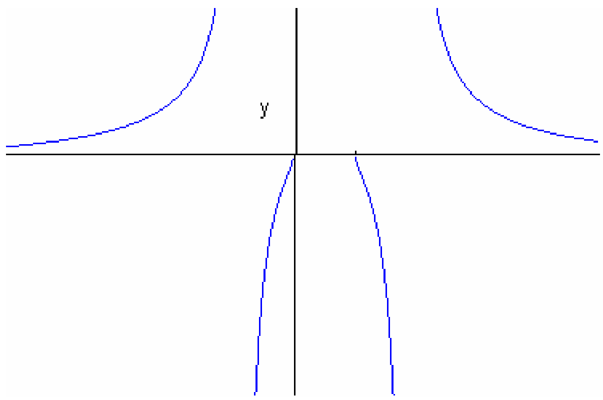
$y = \log(x - 1)$



$y = \log|x - 1|$



$y = \log\log|x - 1|$



$y = 1 / \log\log|x - 1|$

Dal grafico si deduce subito che l'immagine di $g(x)$ è $(0, +\infty)$; l'invertibilità della funzione segue dalla sua monotonia .
Studiamo l'equazione $g(x) = k$: per passi successivi questa equivale a

$\log \log (x - 1) = 1 / k$ purché $k \neq 0$

$\log (x - 1) = e^{1 / k}$

$x = 1 + e^{e^{1 / k}}$.

Perché la soluzione trovata sia accettabile deve essere $e^{e^{1 / k}} > e$, cioè $e^{1 / k} > 1$; questo accade se $k > 0$. In definitiva dunque l'immagine di $g (x)$ è $(0 , +\infty)$; la funzione è iniettiva e quindi invertibile ; l'inversa è la funzione $g^{-1} (k) = 1 + e^{e^{1 / k}}$.

2.

(a)

Occorre imporre che il denominatore sia diverso da 0.
L'equazione $\sqrt{2 x^2 + 1} = x$ equivale al sistema $x \geq 0$, $2 x^2 + 1 = x^2$, che non ha soluzioni. La disequazione è dunque definita su tutto R.

Elevando al quadrato, la disequazione data fornisce (il lettore ricostruisca i passaggi non riportati) :

$$2 x \sqrt{2 x^2 + 1} \leq 2 x (x - 1) .$$

Se $x = 0$, è verificata.
Se $x > 0$ equivale a $\sqrt{2 x^2 + 1} \leq x - 1$, da cui segue il sistema $x \geq 1$, $x^2 + 2 x \leq 0$, che non ha soluzioni.
Se $x < 0$ equivale a $\sqrt{2 x^2 + 1} \geq x - 1$, che è sempre verificata.
In conclusione, la disequazione è verificata per $x \leq 0$.

(b)

L'equazione è definita per $\cos 2x \neq \pm 1$, cioè $2 x \neq k \pi$ ovvero $x \neq k \pi / 2$.
Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

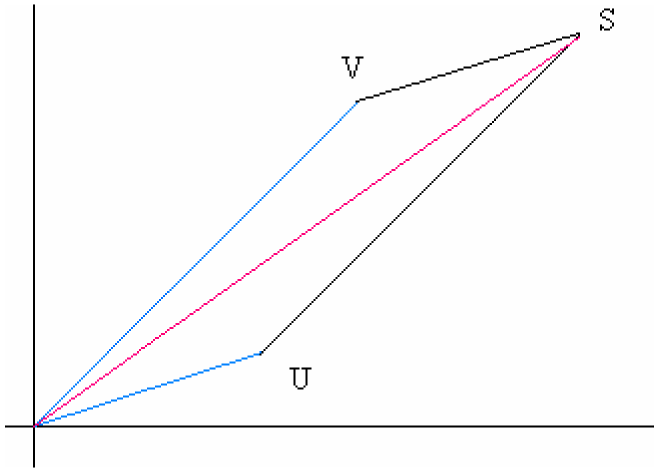
$$\frac{2 \operatorname{sen}x \cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{3 \cos x}{2 \cos^2 x}$$

che nel dominio trovato si semplifica in

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \frac{3}{2 \cos x} \quad 2 / [3 (1 - e^{-\varepsilon})] \Leftrightarrow \quad 2 \cos^2 x = 3 \operatorname{sen}x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen}x - 2 = 0.$$

Questa fornisce $\operatorname{sen}x = ½$ oppure $\operatorname{sen}x = -2$: la prima equazione fornisce $x = \pi / 6 + 2 k \pi$ oppure $x = 5 \pi / 6 + 2 k \pi$, la seconda è impossibile.

3.



Applicando il teorema di Carnot al triangolo OVS e tenendo conto che l'angolo in V misura 150^o :

$| \; S \; |^2 = 1 + 4 - 4 \cos 150^o$ ovvero $| \; S \; | = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Applicando di nuovo il teorema al triangolo OSU e indicando con α l'angolo tra i vettori S ed U :

$4 = 5 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \cos \alpha$ ovvero $\cos \alpha = (1 + \sqrt{3}) / \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = 0{,}9390708$.

Da questo segue che è $\alpha = 20^o \, 6'$ e dunque l'angolo richiesto è $50^o \, 6'$.

4.

La disequazione si può riscrivere nella forma :

$$- \varepsilon < \log \frac{3n - 2}{3n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\varepsilon} < 1 - \frac{2}{3n} < e^{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{\varepsilon} < \frac{2}{3n} < 1 - e^{-\varepsilon} \, .$$

Poiché $1 - e^{\varepsilon} < 0$, la prima disequazione è sicuramente verificata. La seconda è verificata definitivamente , più precisamente per $n > 2 / [\, 3 \, (1 - e^{-\varepsilon}) \,]$.