Soluzioni

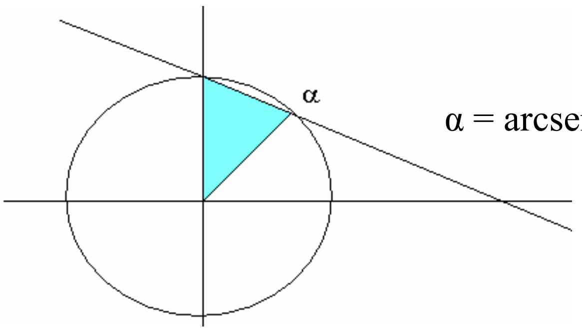
1.

(a)

Il numeratore è definito per $2 \text{ sen} x + \cos x - 2 \geq 0$; dove è definito , questo è positivo. Quindi perché sia verificata la disequazione, il denominatore deve essere > 0. In definitiva la disequazione data equivale al sistema :

$2 \text{ sen } x + \cos x - 2 \geq 0$

$2 Y + X - 2 \geq 0$

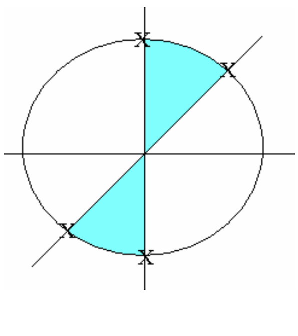


$\alpha = \text{arcsen } 3 / 5 = \arccos 4 / 5 = \text{arctg } 3 / 4$

$\text{sen} (2 x - \pi / 4) > \sqrt{2} / 2$

$\pi / 4 < 2 x - \pi / 4 < 3 \pi / 4 \quad + 2 k \pi \quad \rightarrow \quad \pi / 2 < 2 x < \pi \quad + 2 k \pi \quad \rightarrow$

$\pi / 4 < x < \pi / 2 \quad + k \pi$



La disequazione è verificata per $\pi / 4 < x < \pi / 2 \quad + 2 k \pi$
Si osservi che è $\alpha < \pi / 4$ poiché è $\text{sen } \alpha = 3 / 5 < \text{sen } \pi / 4 = 1 / \sqrt{2}$.

(b)

La disequazione è definita per $1 + x \geq 0$, $x \geq 0$, cioè per $x \geq 0$.
Riscriviamola nella forma

$$\sqrt{1+x} \geq \sqrt{|2x-1|} + \sqrt{x}$$

ed eleviamo ambo i membri al quadrato ; con opportune semplificazioni si ottiene :

$$\sqrt{x\,|2x-1|} \leq 1 - |2x-1| .$$

Deve dunque essere

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ \sqrt{2x^2 - x} \leq 1 - x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{x - 2x^2} \leq x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 1/2 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - x \leq 1 - 2x + x^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1/2 \\ x - 2x^2 \leq x^2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 1/2 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1/2 \\ 3x^2 - x \geq 0 \end{cases}$$

Il primo sistema è verificato per $x \in [\,1/2\,,(\sqrt{5} - 1)/2\,]$, il secondo per $x \in [\,1/3\,,1/2\,] \cup \{0\}$.
La disequazione data è verificata per $x \in [\,1/3\,,(\sqrt{5} - 1)/2\,] \cup \{0\}$

2.

(a) C.E.

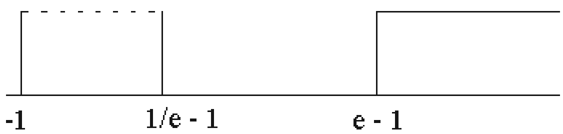
$$\begin{cases} x > -1\,,\ x \neq 0 \\ 1/|\log(x+1)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1\,,\ x \neq 0 \\ \log(x+1) \geq 1 \text{ opp. } \log(x+1) \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -1 \ , \ x \neq 0 \\ x \geq e - 1 \ \text{ opp. } \ x \leq 1/e - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-1 \, , 1/e \, - 1 \,] \cup [\, e - 1 \, , +\infty \,)$$

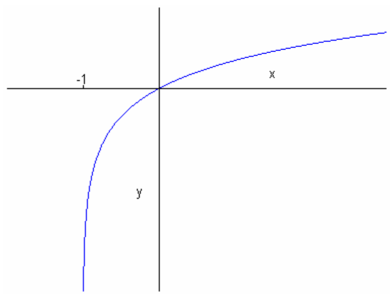
(b) SGN

La funzione arcoseno ha lo stesso segno del suo argomento ; la funzione f (x) dunque non si annulla mai ed è positiva se

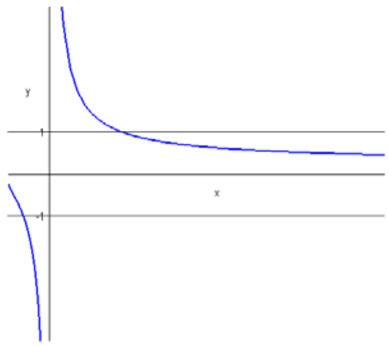
$$\begin{cases} x \in \text{C.E.} \\ 1 / \log (1 + x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in [\, e - 1 \, , +\infty \,)$$



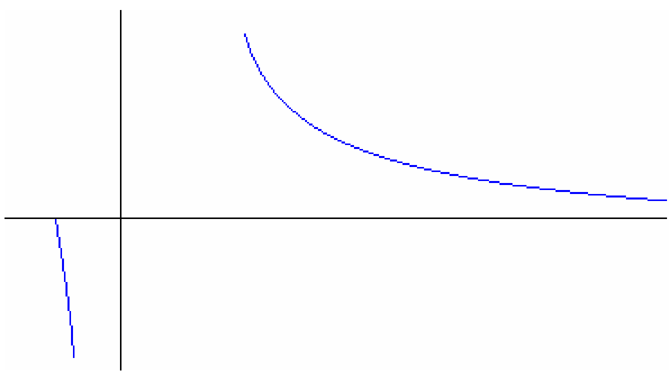
(c) GRAFICO



y = log (1 + x)



y = 1 / log (1 + x)



y = arcsen (1 / log (1 + x))

(c) Restringiamo la funzione all'intervallo $[\, e - 1 , +\infty \,)$.

$$f(x) = k \;\Rightarrow\; \frac{1}{\log(x+1)} = \operatorname{sen} k, \quad \text{purché} \quad -\pi/2 \le k \le \pi/2$$

$\log(1+x) = 1/\operatorname{sen} k$, purché $k \neq 0$

$x = \exp(1/\operatorname{sen} k) - 1$.

La soluzione trovata è accettabile se

$\exp(1/\operatorname{sen} k) - 1 \ge e - 1 \;\leftrightarrow\; 1/\operatorname{sen} k \ge 1 \leftrightarrow\; 0 < \operatorname{sen} k \le 1 \leftrightarrow 0 < k \le \pi/2$

Quindi l'immagine della funzione è $(\, 0 , \pi/2 \,]$, la funzione è invertibile , la funzione inversa è data da $f^{-1}(k) = \exp(\, 1/\operatorname{sen} k\,) - 1$.

(d) Nell'intervallo dato $f(x)$ è decrescente : $e - 1 \le x < y \le \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$.
Infatti $\log(1+x)$ è una funzione crescente , $1/\log(1+x)$ è decrescente e l'arcoseno lascia invariata la monotonia.

$f(x) > f(y) \Leftrightarrow 1/\log(1+x) > 1/\log(1+y) \Leftrightarrow (*)$

$\log(1+x) < \log(1+y) \;\Leftrightarrow\; x < y$.

(*) il passaggio è lecito perché i denominatori per cui abbiamo moltiplicato sono positivi

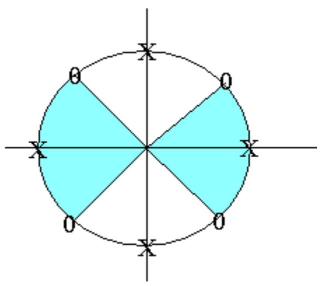
3.

(a)

La funzione è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $x \neq k\pi$.

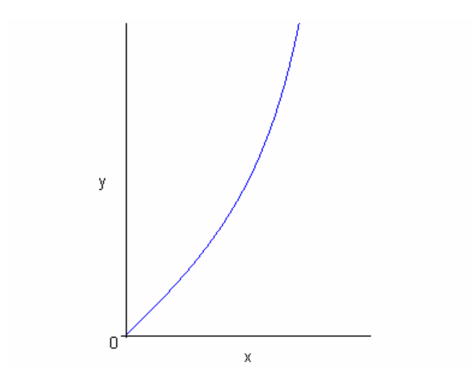
$f(x) \ge 0 \quad\leftrightarrow\quad \dfrac{1}{|\operatorname{tg} x|} \ge 1 \quad\leftrightarrow\quad \operatorname{tg} x \neq 0$, $-1 \le \operatorname{tg} x \le 1 \dfrac{1}{|\operatorname{tg} x|} \ge 1 \;\leftrightarrow$

$-\pi/4 + k\pi \le x \le \pi/4 + k\pi$, $x \neq k\pi$

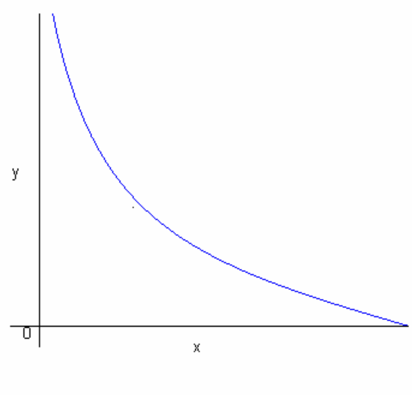


(b) , (c)

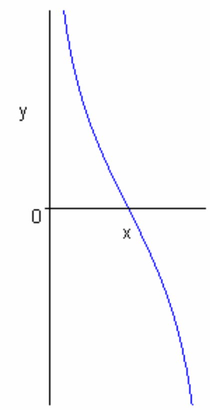
La funzione è pari e di periodo π : possiamo quindi limitarci a studiarla nell'intervallo $[\, 0 , \pi / 2 \,]$.



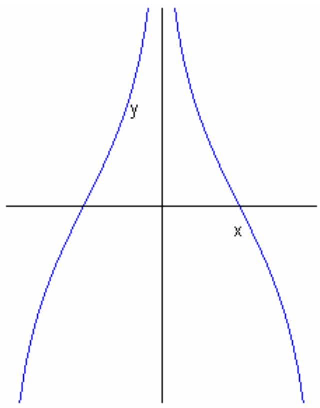
$y = \mathrm{tg}\, x$



$y = 1 / \mathrm{tg}\, x$

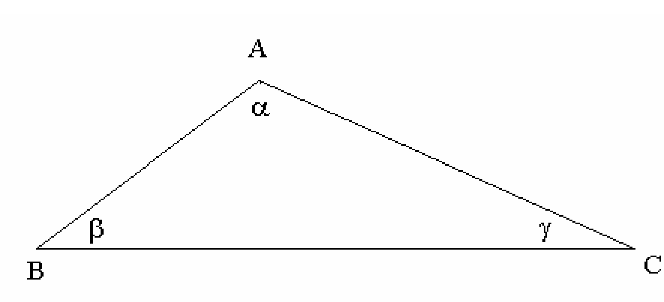


$y = f (x)$ in $(0 , \pi / 2)$



$y = f (x)$ in $(- \pi / 2 , \pi / 2)$

4.



$$\frac{16}{\sqrt{15}/4} = \frac{AC}{3\sqrt{15}/16} = \frac{AB}{\sqrt{15}/8} \qquad \mathrm{sen}\,\gamma = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

(positivo , perché γ è angolo di un triangolo)

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\gamma} = \frac{7}{8}$$ (positivo , perché deve avere lo stesso segno della tangente)

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$ (positivo , perché β è angolo di un triangolo)

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta - \gamma) = -\cos(\beta + \gamma) = \operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\gamma - \cos\beta\,\cos\gamma = -1/4$$

(dunque il triangolo è ottusangolo)

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$ (necessariamente positivo)

Teorema dei seni :

$$\frac{16}{\sqrt{15}/4} = \frac{AC}{3\sqrt{15}/16} = \frac{AB}{\sqrt{15}/8}$$

$AB = 8$, $AC = 12$

perimetro = 36

area = $\frac{1}{2}\ AB\ AC\ \operatorname{sen}\alpha = 12\sqrt{15}$.