

Introduzione alla Matematica

Prova scritta del 26.10.2007

[1]

1. Punti 6 + 4

Risolvere le seguenti disequazioni :

$$(a) \frac{2 \cos x + \sin x - 2}{\cos 2x \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right]} \geq 0 \quad (b) \sqrt{|x^2 - x|} > x + 1.$$

2. Punti 11

Data la funzione $F(x) = \arcsin \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$,

- (a) scriverne le componenti elementari, precisando l'ordine in cui intervengono
- (b) trovarne C.E., segno, zeri
- (c) trovarne l'immagine, provare che è invertibile, scrivere l'inversa
- (d) usando la definizione, provare che è monotona
- (e) tracciarne il grafico.

3. Punti 6

Disegnare il grafico delle funzioni

$$(a) \arccos e^{1/\log x} \quad (b) \operatorname{tg} \frac{\pi}{1 + e^{-x}}$$

deducendolo per passi successivi da quello di funzioni elementari note.

4. Punti 2

Un vettore \vec{S} di lunghezza 10 è la somma di due vettori \vec{U} e \vec{V} che formano con \vec{S} angoli rispettivamente uguali a 60° e 45° . Calcolare le lunghezze dei due vettori.

5. Punti 4

Provare per induzione l'identità $\sum_{k=1}^n \frac{3 - 2^k}{4^k} = \frac{2^n - 1}{4^n}$.

Introduzione alla Matematica

Prova scritta del 26.10.2007 [2]

1. Punti 6 + 4

Risolvere le seguenti disequazioni :

$$(a) \frac{2 \sin x + \cos x - 2}{\sin 2x \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right]} \geq 0 \quad (b) \sqrt{|x^2 - 2x|} > x - 1.$$

2. Punti 11

Data la funzione $F(x) = \arcsin \frac{1 - \log x}{1 + \log x}$,

- (a) scriverne le componenti elementari, precisando l'ordine in cui intervengono
- (b) trovarne C.E., segno, zeri
- (c) trovarne l'immagine, provare che è invertibile, scrivere l'inversa
- (d) usando la definizione, provare che è monotona
- (e) tracciarne il grafico.

3. Punti 6

Disegnare il grafico delle funzioni

$$(a) \arccos e^{-1/\log x} \quad (b) \operatorname{tg} \frac{\pi}{1 + e^x}$$

deducendolo per passi successivi da quello di funzioni elementari note.

4. Punti 2

Un vettore \vec{S} di lunghezza 10 è la somma di due vettori \vec{U} e \vec{V} che formano con \vec{S} angoli rispettivamente uguali a 30° e 45° . Calcolare le lunghezze dei due vettori.

6. Punti 4

Provare per induzione l'identità $\sum_{k=1}^n \frac{3^k - 4}{9^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - 3^n}{9^n}$.

