**Istituzioni di Matematiche I - C. di L. in Chimica**
**Soluzioni della prova scritta parziale n . 2 del 7 . 2 . 07**

**1.**

Ponendo prima $x = \text{sen}\, t$ , $dx = \cos t\, dt$ e poi $\text{tg}\, t = z$ , $dt = dz / ( 1 + z^2 )$ , si ottiene :

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\text{sen}^2 t}\, dt = \int_{\sqrt{3}/3}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 ( 1 + z^2 )} .$$

Scomponiamo la funzione nella forma $\frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1} + \left(\frac{D}{z}\right)'$ ; essendo una funzione pari, si deduce subito che deve essere $A = B = 0$ ; i calcoli residui permettono di ottenere $C = D = -1$.
Una primitiva della funzione è dunque $\text{arctg}\, z - 1/z$ .
Il valore dell'integrale è $\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$ .
Più semplicemente, ponendo $x = \cos t$ :

$$I = \int_0^{\pi/3} \text{tg}^2 t\, dt = \int_0^{\pi/3} (1 + \text{tg}^2 t - 1)\, dt$$

Si trova subito la primitiva $\text{tg}\, t - t$ , con cui calcolare il valore dell'integrale.

**2.**

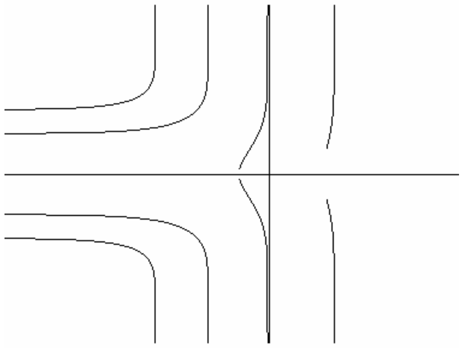
L'equazione è definita per $x \in \mathbf{R}$ , $y \neq 0$.
Non ci sono soluzioni costanti ; per risolvere l'equazione, procediamo nel modo consueto , separando le variabili e integrando :

$$\int_{y_0}^{y} e^{-s^2}\, ds = \int_{x_0}^{x} e^s\, ds \iff e^{y^2} = 2 ( c - e^x ) \quad ( c = e^{x_0} + e^{-y_0^2} / 2 ) \iff$$

$$y = \pm \sqrt{- \log ( 2 ( c - e^x ) )}$$

Le soluzioni sono definite per $0 < 2 ( c - e^x ) < 1$ , cioè per $c - ½ < e^x < c$ ; questo significa che :

| | | |
|---|---|---|
| per $0 < c \leq ½$ | deve essere | $x < \log c$ |
| per $c > ½$ | deve essere | $\log ( c - ½ ) < x < \log c$ . |



Si osservi che le soluzioni ottenute per $c > ½$ arrivano all'asse delle x, con tangente verticale.

**3.**

Se $x > 0$ $\quad a_n \sim x \log n / \sqrt{n} > x / \sqrt{n}$ $\quad$ serie divergente

se $x = 0$ $\quad a_n \sim \log 2 / \sqrt{n}$ $\quad$ serie divergente

se $x < 0$ $\quad a_n \sim n^x / \sqrt{n} = (1/n)^{½ - x}$ $\quad$ serie convergente per $x < -1/2$
divergente per $-1/2 \leq x < 0$

**4.**

( I )

La funzione f ( t ) :
non è integrabile in un intorno di $-\infty$ perché per $t \to -\infty$ $\ f(t) \to -1$
non è integrabile in un intorno di 0 perché per $t \to 0$ $\ f(t) \sim 1/t$
è integrabile in un intorno di $+\infty$ perché per $t \to +\infty$ $\ f(t) \sim 1/e^t < 1/t^\alpha$ : scegliendo $\alpha > 1$, il criterio di confronto permette di concludere.

( II )

C.E. $\quad (0, ½) \cup (1, +\infty)$

( infatti deve essere $\log x < 0$, $\log 2x < 0$ oppure $\log x > 0$, $\log 2x > 0$ )

SEGNO $\quad F(x) > 0$ per $x > 1$, $F(x) < 0$ per $0 < x < ½$

( infatti se $x > 1$, si ha $\log 2x > \log x > 0$, $f > 0$ ; se $0 < x < ½$, risulta invece $\log x < \log 2x < 0$, $f < 0$ )

LIMITI $\quad$ per $x \to 0$ $\quad F(x) = \dfrac{\log 2x - \log x}{e^{\xi} - 1} = \dfrac{\log 2}{e^{\xi} - 1} \to -\log 2$

per $x \to 1/2$ $\quad F(x) \to \displaystyle\int_{-\log 2}^{0} f(t)\,dt = -\infty$

per $x \to 1$ $\quad F(x) \to \displaystyle\int_{0}^{\log 2} f(t)\,dt = +\infty$

per $x \to +\infty \quad F(x) \to 0$

DERIVATA $\quad F'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = -\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$

La derivata è sempre negativa nel C.E.

per $x \to 0 \quad F'(x) \to 1$

$$F''(x) = \frac{4x-3}{(x-1)^2(2x-1)^2}$$

La derivata seconda è negativa in $(0, \frac{1}{2})$, positiva in $(1, +\infty)$.