Istituzioni di Matematiche I - C. di L. in Chimica
Soluzioni della prova scritta parziale n . 2 dell' 11 . 1 . 07

1.

(I) La funzione $f(t)$ è integrabile in un intorno di 0 e in intorno di 1 , perché questi sono due discontinuità eliminabili . Infatti :

per $t \to 0$ $\;f(t) \sim \sqrt{1/|\log t|} \;\to 0$

per $t \to 1$ $\;f(t) \sim \sqrt{2|t-1| / |t-1|} \;\to \sqrt{2}$.

La funzione non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ perché per $t \to +\infty$ $\;f(t) \sim t/\sqrt{\log t} \;\to +\infty$.

(II)

C.E. $\qquad [\,0\,, +\infty\,)$

SEGNO $\qquad F(x) > 0$ per $x > 1$, $F(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $F(0) = F(1) = 0$.

LIMITI $\qquad$ per $x \to +\infty$ $\quad F(x) = (x^2 - x)\sqrt{\left|\dfrac{(\xi+1)(\xi-1)}{\log \xi}\right|}$ □

$$\frac{x^2\,\xi}{\sqrt{\log \xi}} > \frac{x^3}{\sqrt{\log x^2}} \to +\infty \qquad \text{senza asintoto}$$

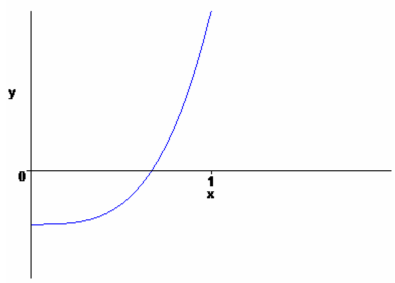
DERIVATA $\quad F'(x) = 2x\sqrt{\dfrac{(x^2+1)\,|x^2-1|}{2\,|\log x|}} - \sqrt{\dfrac{|x^2-1|}{|\log x|}} =$

$$= \sqrt{\frac{|x^2-1|}{|\log x|}}\left(\sqrt{2}\,x\sqrt{x^2+1} - 1\right) \qquad (x \neq 0\,,\; x \neq 1)$$

Per studiare il segno del termine entro parentesi, osserviamo che

$$\sqrt{2}\,x\sqrt{x^2+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2(x^2+1) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^4 + 2x^2 - 1 > 0$$

Questa ultima disequazione si studia per via grafica :



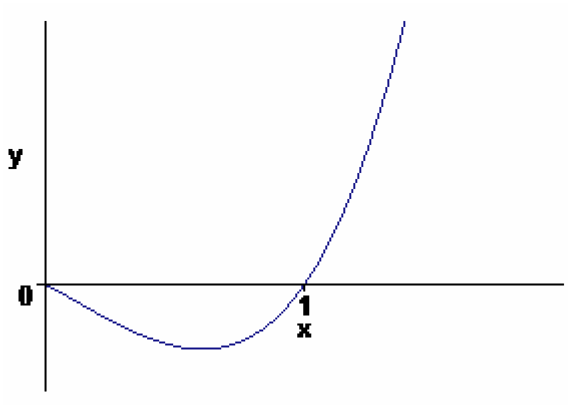
Segno F' (x)

```
X-------------0———X————————
0             α   1
```

Comportamento della derivata nei punti singolari :

$$\text{per } x \to 0 \quad F'(x) \to 0 \quad , \qquad \text{per } x \to 1 \quad F'(x) \to \sqrt{2} \, .$$

GRAFICO DI F (x)



2.

L'equazione è definita per x , y$\in$ **R** .
Le funzioni y = 0 , = 1 sono soluzioni costanti. Queste individuano 3 intervalli della y in cui studiare l'equazione : $y > 1$, $0 < y < 1$, $y < 0$.
Per trovare le altre soluzioni , procediamo nel modo consueto , separando le variabili e integrando :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{x_0}^{x} ds$$

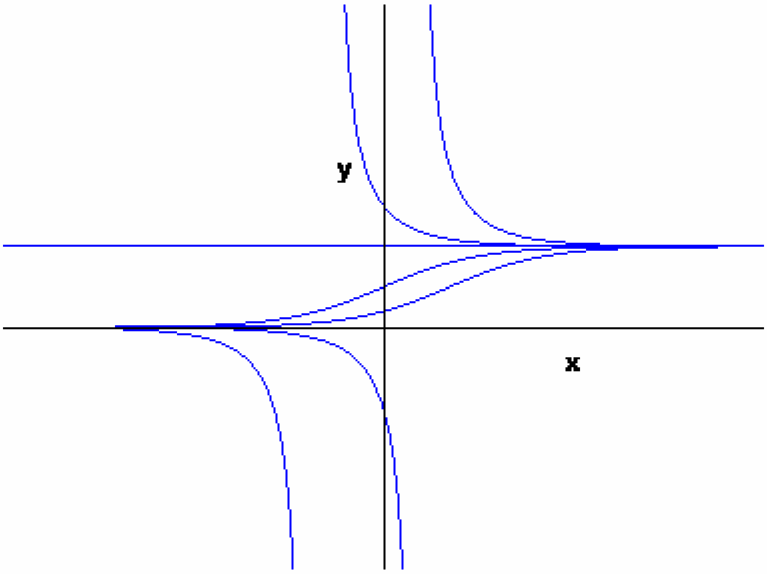
$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y}{y-1} \right| = x - c \quad \text{cioè} \quad \log \left| \frac{y}{y-1} \right| = 2(x-c)$$

$$\left| \frac{y}{y-1} \right| = k e^{2x} \quad (k > 0) \, .$$

<u>Se y > 1</u> : $\quad y = \dfrac{k e^{2x}}{k e^{2x} - 1} \qquad \text{per } x > \log \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

<u>Se 0 < y < 1</u> : $\quad y = \dfrac{k e^{2x}}{k e^{2x} + 1} \qquad \text{per } x \in R$

<u>Se y < 0</u> : $\quad y = \dfrac{k e^{2x}}{k e^{2x} - 1} \qquad \text{per } x < \log \dfrac{1}{\sqrt{k}}$



3.

L'integrale è improprio solo perché esteso ad una semiretta (non ci sono punti di discontinuità) . Per $x \to \infty$ $f(x) \approx \log x / x^3 < x / x^3 = 1 / x^2$; l'esistenza dell'integrale segue dal criterio del confronto.
Per quanto riguarda il calcolo delle primitive, integrando per parti si ottiene :

$$-\frac{1}{2(x-3)^2}\log(x-5) + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2(x-5)} \;.$$

Il nuovo integrale si calcola con il metodo di scomposizione di Hermite , essendo

$$\frac{1}{(x-3)^2(x-5)} = \frac{1/4}{x-5} - \frac{1/4}{x-3} + \left(\frac{1/2}{x-3}\right)' \;.$$

In definitiva, le primitive sono :

$$-\frac{1}{2(x-3)^2}\log(x-5) + \frac{1}{8}\log(x-5) - \frac{1}{8}\log(x-3) + \frac{1}{4(x-3)} + c \,.$$

L'integrale vale $(\log 3)/8 - (1/12)$.

4.

Perché la serie abbia senso deve essere $x > 0$.
Poiché $\log(nx) = \log n + \log x$, si ha $a_n \approx \log n / \sqrt{n} > 1 / \sqrt{n}$; dal criterio del confronto segue che la serie diverge per ogni $x > 0$.